

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO EM GRÁFICOS DE**  
**CONTROLE PARA VARIÁVEL CONTÍNUA:**  
**UM ESTUDO DE CASO**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE**  
**SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM**  
**ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

**JOÃO CALDAS DO LAGO NETO**

**FLORIANÓPOLIS (SC), MAIO DE 1999.**

**SANTA CATARINA – BRASIL**

**O EFEITO DA AUTOCORRELAÇÃO EM GRÁFICOS DE  
CONTROLE PARA VARIÁVEL CONTÍNUA:  
UM ESTUDO DE CASO**

**JOÃO CALDAS DO LAGO NETO**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE**

**“MESTRE EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO”**



---

**PROF. RICARDO MIRANDA BARCIA, Ph.D.  
COORDENADOR**

**BANCA EXAMINADORA:**



---

**PROF. ROBERT WAYNE SAMOHYL, Ph.D.  
ORIENTADOR**




---

**PROF. PEDRO ALBERTO BARBETTA, Dr.**



---

**PROF. ROSANA CRISTINA PARENTE, Dra.**



---

**WESLEY VIEIRA DA SILVA, Msc.**

# AGRADECIMENTOS

---

Manifesto os meus sinceros agradecimentos às seguintes pessoas e instituições:

- Ao Professor e amigo ROBERT SAMOHYL, pelo apoio desde que cheguei a Florianópolis até hoje, pela sua paciência comigo e a eficiente orientação fornecida durante todo o curso de Mestrado;
- À Professora ROSANA PARENTE, pelas correções feitas a este trabalho e pelo incentivo para a realização deste mestrado;
- Ao Professor PEDRO ALBERTO BARBETTA, pelas correções e sugestões feitas ao trabalho;
- Ao amigo WESLEY VIEIRA DA SILVA, também pelo apoio dado desde que cheguei a Florianópolis até os dias de hoje, bem como pelas correções e sugestões feitas ao trabalho;
- Ao Professor IRAPUAN PINHEIRO pelas correções e sugestões feitas ao trabalho;
- Aos amigos AMILTON, ANDERSON, ADRIANO e FELIPE, pela sincera amizade e pelo apoio dado desde a chegada a Florianópolis até os dias de hoje;
- Aos amigos MARCO ANTONIO, NILOMAR e NILSON pela sincera amizade, pelo apoio computacional, pelas considerações e sugestões para a conclusão desta dissertação. Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão deste mestrado;

- À CAPES, pelo apoio financeiro concedido ao projeto MESTRADO INTERINSTITUCIONAL. À *Universidade do Amazonas* por viabilizar as condições administrativas necessárias ao pleno êxito do referido projeto;
- Aos colegas do *Departamento de Estatística da Universidade do Amazonas* por assumirem as disciplinas , permitindo o meu afastamento.



# DEDICATÓRIA

---

*Agradeço a DEUS por tudo de bom que ELE tem me concedido ao longo da minha vida.*

*Sou grato aos meus queridos pais LUIZ LAGO e GRAÇA LAGO, por terem me indicado o caminho do estudo desde a mais tenra idade*

*Com minha esposa AUDREY LAGO e meus filhos NICOLLE e ARIEL LAGO tenho uma dívida eterna. Sei que jamais poderei repor a merecida atenção que lhes deixei de dedicar durante a realização deste trabalho. Neste momento, desejo agradecer pelo apoio e compreensão que deles recebi.*

*Ao meus avós ODORICO e YOLANDA ALFALA (In memoriam)*

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	viii
<b>LISTA DE QUADROS</b>	xii
<b>NOMENCLATURA UTILIZADA</b>	xiv
<b>RESUMO</b>	xvii
<b>ABSTRACT</b>	xviii
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2. IMPORTÂNCIA DO TRABALHO	2
1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO	3
1.3.1. <i>Objetivo Geral</i>	3
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	3
1.4. ASPECTOS METODOLÓGICOS DO TRABALHO	3
1.5. AS LIMITAÇÕES DO TRABALHO	4
1.6. ESTRUTURA DO TRABALHO	5
<b>2. REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>6</b>
<b>3. GRÁFICO DE CONTROLE</b>	<b>10</b>
3.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS	10
3.2. TIPOS DE GRÁFICOS DE CONTROLE	13
3.2.1. <i>Caso 1 – Gráfico de Shewhart</i>	14
3.2.2. <i>Caso 2 – Gráfico MOSUM</i>	16
3.2.3. <i>Caso 3 – Gráfico EWMA</i>	18
3.2.4. <i>Caso 4 : Gráfico CUSUM</i>	21
3.3. CONTROLE ESTATÍSTICO DO PROCESSO PARA DADOS AUTOCORRELACIONADOS	25
<b>4. ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS</b>	<b>30</b>
4.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS	30
4.1.1. <i>Teste de Hipótese</i>	32
4.2. MODELOS ESTACIONÁRIOS	33
4.2.1. <i>Processos Autoregressivos</i>	35
4.2.2. <i>Processos de Média Móvel – MA(q)</i>	41
4.2.3. <i>Processos Mistos – ARMA(p, q)</i>	45
4.3. PROCESSOS NÃO ESTACIONÁRIOS	47
4.3.1. <i>Processo Autoregressivo Não Estacionário</i>	48
4.3.2. <i>Processos de média móvel integrada – IMA(d, q)</i>	49
4.4. MODELO DE VERIFICAÇÃO	51
4.4.1. <i>Teste Portmanteau</i>	52
4.5. ANÁLISE DE INTERVENÇÃO	53
4.5.1. <i>Causas Especiais em Séries Temporais</i>	53
4.6. MONITORAMENTO E AJUSTE SIMULTÂNEO	56
4.6.1. <i>Gráfico de Ajuste Limitado – BAC ( Bounded Adjustment Chart )</i>	57

4.6.2. Combinar Sistema de Ajuste (APC) e o Sistema de Monitoramento (CEP).....	59
<b>5. - ANÁLISE DOS RESULTADOS ENCONTRADOS.....</b>	<b>62</b>
5.1. UMA BREVE DESCRIÇÃO DO PROCESSO PRODUTIVO .....	62
5.2. VERIFICAÇÃO DAS HIPÓTESES DOS GRÁFICOS DE CONTROLE .....	65
5.3. A MODELAGEM ARIMA ( $P, D, Q$ ).....	68
5.4. ANÁLISE MENSAL DOS GRÁFICOS DE CAUSA ESPECIAL (SCC), CAUSA COMUM (CCC) E INTERVENÇÃO .....	76
5.4.1. Gráfico de Causa Especial (SCC).....	76
5.4.2. Gráfico de Causa Comum (CCC) .....	81
5.4.3. Análise de Intervenção .....	85
5.5. REVISÃO DA CARTA DE CONTROLE .....	87
5.6. CONTROLE ATIVO DO PROCESSO.....	90
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>100</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>	<b>102</b>
<b>-ANEXO 1 – FIGURAS.....</b>	<b>109</b>
<b>-ANEXO 2 – PROGRAMA COMPUTACIONAL .....</b>	<b>119</b>

# LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1 – Gráfico de Controle de Shewhart.....	11
Figura 2 – Inclinação da Estatística CUSUM.....	23
Figura 3 – Classificação dos Outliers de Acordo com a Metodologia Proposta por CHEN & LIU (1993).....	54
Figura 4 – Primeira Etapa da Produção das Rodas de Bicicleta – Fabricação dos Aros.....	63
Figura 5 – Posicionamento do Raio no Cubo e Pre-Aperto do Cubo no Aro de Bicicleta.....	64
Figura 6 – Processo de Centralização do Cubo no Aro de Bicicleta.....	64
Figura 7 – Fluxograma do Processo de Fabricação do Aro de Bicicleta na Empresa Omega S.A.....	65
Figura 8 – Gráfico da Função de Autocorrelação Amostral $r_k$ para as Observações Individuais da Variável <i>Descentralização da Roda (mm)</i> Coletadas em Fevereiro de 1998 na Empresa Omega S.A.....	67
Figura 9 – Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos Provenientes da Equação (5.2.1).....	71
Figura 10 – Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos Provenientes da Equação (5.2.2).....	72
Figura 11 – Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos Provenientes da Equação (5.2.3).....	73

Figura 12 – Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos Provenientes da Equação (5.2.4).....	74
Figura 13 – Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos Provenientes da Equação (5.2.5).....	75
Figura 14 – Gráfico de Causa Comum para os Valores Ajustados pela Equação (5.2.1).....	81
Figura 15 – Gráfico de Causa Comum para os Valores Ajustados pela Equação (5.2.2).....	82
Figura 16 – Gráfico de Causa Comum para os Valores Ajustados pela Equação (5.2.3).....	83
Figura 17 – Gráfico de Causa Comum para os Valores Ajustados pela Equação (5.2.4).....	84
Figura 18 – Gráfico de Causa Comum para os Valores Ajustados pela Equação (5.2.5).....	85
Figura 19 – Gráficos Conjuntos da Série Não Compensada com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0, 0,25$ e $0,5$ . Os Gráficos do Lado Direito Mostram os Desvios Residuais $\{e_t\}$ Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_s$ .....	92
Figura 20 – Gráfico da Função de Autocorrelação Amostral dos Resíduos Provenientes da Equação (5.2.1).....	109
Figura 21 – Gráfico contendo 830 Leituras em Intervalos Constantes de Uma Hora ao Longo do Mês de Março de 1998. Dados Padronizados por $\sigma_0$ .....	109
Figura 22 – Gráfico SCC dos Resíduos Padronizados do Modelo (5.2.2).....	110

Figura 23 – Gráfico contendo 705 Leituras em Intervalos Constantes de Uma Hora ao Longo do Mês de Abril de 1998. Dados Padronizados por $\sigma_0$ .....	110
Figura 24 – Gráfico <i>SCC</i> dos Resíduos Padronizados do Modelo (5.2.1).....	111
Figura 25 – Gráfico <i>CCC</i> para os Valores Ajustados para Fevereiro de 1998 através do Modelo ARIMA(0, 1, 1).....	111
Figura 26 – Gráfico da Função de Autocorrelação Amostral $r_k$ Para os Resíduos Provenientes da Equação (5.2.4).....	112
Figura 27 – Série Não Compensada em Conjunto com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0$ Referente a Março de 1998.....	112
Figura 28 – Série dos Desvios Residuais Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_S$ para o Esquema BAC para $L = 0$ Referente a Março de 1998.....	113
Figura 29 – Série Não Compensada em Conjunto com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0,25$ Referente a Março de 1998.....	113
Figura 30 – Série dos Desvios Residuais Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_S$ para o Esquema BAC para $L = 0,25$ Referente a Março de 1998.....	114
Figura 31 – Série Não Compensada em Conjunto com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0,50$ Referente a Março de 1998.....	114
Figura 32 – Série dos Desvios Residuais Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_S$ para o Esquema BAC para $L = 0,50$ Referente a Março de 1998.....	115
Figura 33 – Série Não Compensada em Conjunto com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0$ Referente a Maio de 1998.....	115

Figura 34 – Série dos Desvios Residuais Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_S$ para o Esquema BAC para $L = 0$ Referente a Maio de 1998.....	116
Figura 35 – Série Não Compensada em Conjunto com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0,25$ Referente a Maio de 1998.....	116
Figura 36 – Série dos Desvios Residuais Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_S$ para o Esquema BAC para $L = 0,25$ Referente a Maio de 1998.....	117
Figura 37 – Série Não Compensada em Conjunto com o Sinal Extraído pelo Esquema BAC para $L = 0,50$ Referente a Maio de 1998.....	117
Figura 38 – Série dos Desvios Residuais Monitorados pela Estatística de Fisher $Q_S$ para o Esquema BAC para $L = 0,50$ Referente a Maio de 1998.....	118
Figura 39 – Programa Computacional para Determinar os Ajustes Estocásticos Realizados Através do Gráfico BAC na Planilha Excel.....	119

# LISTA DE QUADROS

---

- Quadro 1 – Síntese da Aplicação dos Testes Não-Paramétricos *Lilliefors* e Shapiro-Wilks às Médias dos Subgrupos de Tamanho  $n = 5$  no Período Fevereiro a Junho de 1998 na Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A .....66
- Quadro 02 – Síntese da Aplicação dos Testes Não-Paramétricos *Lilliefors* e Shapiro-Wilks às Observações Individuais no Período Fevereiro a Junho de 1998 na Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A.....66
- Quadro 03 – Síntese dos Resultados do Testes *Portmanteau (Q)* com  $k = 22$  autocorrelações Aplicado ao Resíduo  $\{a_t\}$  dos Vários Modelos ARIMA( $p, d, q$ ) Ajustados as Observações Individuais nos Meses Fevereiro de 1998 a Junho de 1998 na Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A.....69
- Quadro 04 – Síntese dos Valores Espúrios Identificados como Prováveis Causas Assinaláveis no Processo para o Período de Fevereiro a Junho de 1998 na Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A .....77
- Quadro 05 – Síntese dos Valores Espúrios Identificados pela Análise de Intervenção Sugerida por CHEN & LIU (1993).....86
- Quadro 06 – Comparação da Estimativa do Desvio Padrão Residual Antes e Depois de Eliminar os Efeitos das Causas Assinaláveis.....88
- Quadro 07 – Percentual de Participação da Variabilidade do Sistema de Causa Comum Frente a Variabilidade Total do Sistema Produtivo.....89



Quadro 08 – Intervalo Médio de Ajustes (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo nos Dados Coletados em Fevereiro de 1998 na Empresa Omega S.A.....	91
Quadro 09 – Intervalo Médio de Ajustes (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo nos Dados Coletados em Março de 1998 na Empresa Omega S.A.....	94
Quadro 10 – Intervalo Médio de Ajustes (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo nos Dados Coletados em Abril de 1998 na Empresa Omega S.A .....	95
Quadro 11 – Intervalo Médio de Ajustes (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo nos Dados Coletados em Maio de 1998 na Empresa Omega S.A.....	97
Quadro 12 – Intervalo Médio de Ajustes (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo nos Dados Coletados em Junho de 1998 na Empresa Omega S.A .....	99
Quadro 13 – Procedimentos para a Construção do Gráfico BAC na Planilha Excel.....	119

## NOMENCLATURA UTILIZADA

---

- $a_t$  = Representa o erro autocorrelacionado do modelo de série temporal;
- $B$  = Representa o operador *backshift*;
- $c_k$  = Representa a autocovariância amostral na  $k$ -ésima defasagem;
- $d$  = Representa o grau de diferenciação utilizada na série temporal;
- $e_t$  = Variável aleatória I.I.D.;
- $g$  = Representa o ganho do processo utilizado na equação fundamental do ajuste;
- $G$  = Representa a constante de suavização utilizada no gráfico BAC-EWMA;
- $G_i^{-1}$  = Representa a  $i$ -ésima raiz do polinômio autoregressivo;
- $H_t$  = Representa a estatística utilizada pelo gráfico EWMA;
- $H_i^{-1}$  = Representa a  $i$ -ésima raiz do polinômio de média móvel;
- $h$  = Representa o valor crítico para a soma acumulada CUSUM;
- $k$  = Representa o valor da folga utilizado no gráfico CUSUM;
- $L$  = Representa o valor crítico utilizado no gráfico BAC-EWMA;
- $M_t$  = Representa a estatística utilizada no gráfico MOSUM;
- $p$  = Representa o grau do polinômio autoregressivo do modelo de série temporal;
- $q$  = Representa o grau do polinômio de média móvel do modelo de série temporal;
- $Q^*$  = Representa a estatística do Teste *Portmanteau*;
- $Q_t^+$  = Representa a estatística utilizada para calcular o limite superior do gráfico CUSUM;

- $Q_t^-$  = Representa a estatística utilizada para calcular o limite inferior do gráfico CUSUM;
- $Q_S$  = Representa a estatística de Fisher ( Cuscore) utilizada no monitoramento dos desvios residuais;
- $r_k$  = Representa a autocorrelação amostral na  $k$ -ésima defasagem;
- $S_t$  = Representa a estatística utilizada pelo gráfico Shewhart;
- $T_0$  = Representa o valor desejado para o nível do processo;
- $t_o$  = Representa o instante onde o efeito especial ou intervenção ocorre;
- $X_t$  = Representa a característica de qualidade em estudo;
- $X_t$  = Representa a variável de controle;
- $x_t$  = Representa o ajuste realizado na variável de controle;
- $Y_t$  = Representa a série da característica de qualidade a ser compensada pelo gráfico BAC – EWMA;
- $y'_t$  = Representa a série ajustada pelo manuseio da variável de controle;
- $\hat{y}'_t$  = Representa a série suavizada pelo gráfico BAC-EWMA;
- $Z_t$  = Representa a série temporal observada;

### Símbolos Gregos

- $\alpha$  = Representa o nível de significância;
- $\phi$  = Representa os pesos do polinômio finito autoregressivo estacionário AR( $p$ );
- $\gamma_k$  = Representa a autocovariância na  $k$ -ésima defasagem;
- $\varphi$  = Representa os pesos do polinômio autoregressivo não estacionário;
- $\lambda$  = Representa a constante de suavização para o EWMA;

- $\mu$  = Representa a média do processo;
- $\pi$  = Representa os pesos do polinômio infinito autoregressivo  $AR(\infty)$ ;
- $\theta$  = Representa os pesos do polinômio finito de média móvel inversível  $MA(q)$ ;
- $\rho_k$  = Representa a função de autocorrelação;
- $\sigma_a$  = Representa o desvio padrão da variável  $a_t$ ;
- $\sigma_o$  = Representa o desvio padrão obtido da hipótese de I.I.D;
- $\sigma_w$  = Representa o desvio padrão do modelo de série temporal estacionário;
- $\psi$  = Representa os pesos do polinômio infinito de média móvel  $MA(\infty)$ ;

## RESUMO

---

A literatura técnica disponível sobre controle estatístico de qualidade em aplicações industriais, ainda está aprisionada ao paradigma do modelo Shewhart-Deming com média constante e erros independentes. Nos anos 30, quando Shewhart introduziu este modelo de monitoramento da produção, era comum produzir grandes lotes e posteriormente, amostrar um número de itens aleatoriamente, visando obter o percentual de defeitos, a quantidade de defeitos de várias observações individuais da característica de qualidade com o objetivo de construir os gráficos  $\bar{X}$  e R. Sob tais condições de amostragem, os itens individuais dentro de cada *subgrupo racional* poderiam ser considerado razoavelmente independente. Com avanço da automação industrial, tais condições são cada vez menos comuns de serem observadas.

Atualmente, as indústrias produzem itens sequencialmente medidos e registrados, e a utilização de subgrupos com quatro ou cinco observações na construção dos gráficos  $\bar{X}$  e R ou CUSUM, simplesmente ignoram uma possível dependência entre observações adjacentes. Certamente, a maioria dos processos industriais violam a suposição de independência proposta por Shewhart, apresentando dados com correlação serial. Sob este aspecto, emprega-se a metodologia de séries temporais para modelar a estrutura correlacionada dos dados através do modelo ARIMA ( $p, d, q$ ) e utiliza-se o resíduo do modelo, o qual constitui uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (I.I.D), no monitoramento do processo produtivo e emprega-se gráficos de controle tradicionais para identificar as possíveis causas assinaláveis.

A idéia de causa comum é generalizada para incluir a existência de autocorrelação intrínseca, ou seja, esta é uma característica inerente ao processo produtivo que não pode ser economicamente removida mas, pode ser utilizada para produzir a base do controle ativo do processo como ferramenta para reduzir, a curto prazo, a variabilidade do processo produtivo. Sob esta ótica, utiliza-se o Gráfico de Ajustes Limitado *Bounded Adjustment Chart* (BAC) proposto por BOX & JENKINS (1963) na sinalização do número de regulagens necessárias para manter o nível do processo próximo a um determinado valor previamente especificado.

## ABSTRACT

---

The technical literature available on statistical quality control is still trapped within the paradigm of Shewhart-Deming model with constant average and independent error. When Shewhart introduced his model monitoring production, it was common to produce large lots and, later on, sample a number of items randomly, seeking to obtain the percentage of defects, the amount of defects of several individual observations of the quality characteristic with the objective of building the graphs  $\bar{X}$  and R. Under such sampling conditions, the individual items inside of each rational subgroup could be reasonably independent. With industrial automatic, such conditions are less and less common. Today, the industries produce items measured and registered sequentially, and the subgroups with four or five observations in the construction of the graphs  $\bar{X}$ , R or CUSUM, simply ignore a possible dependence between adjacent observations. Certainly, most industry processes violate the supposition of independence proposal for Shewhart, presenting data with serial correlation. Under this aspect, the methodology of times series is used to model the correlated structure of the data through the ARIMA (p, d, q) model and the residual which can be thought as an independent and identically distributed random variables (I.I.D), is used in the monitoring the process employing traditional control graphs to identify special causes. The idea of common cause is generalized to include intrinsic autocorrelation, that is to say, an inherent characteristic in productive process that cannot be removed, but it can be used to mark the active control of the process, reducing short-term variability. The Bounded Adjustment Chart (BAC), proposed by BOX & JENKINS (1963), is used to signal the adjustment number to maintain the process level as close as possible to a certain previously specified value.

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Em um mundo bastante competitivo e ávido por novos mercados, a importância da qualidade tem se tornado incrivelmente evidente, transformando o controle estatístico do processo (CEP)<sup>1</sup> em um importante instrumento gerencial para redução da variação entre itens manufaturados e para o crescimento da competitividade industrial através da melhoria contínua da qualidade. Gráficos tradicionais como Shewhart ( $\bar{X}$ ) e amplitude (R) encontram um amplo uso industrial em virtude de suas facilidades computacionais e por exigir treinamento mínimo em estatística.

Com o crescimento da informática, através da maior capacidade de cálculo dos computadores pessoais, tornou-se possível automatizar o CEP e disponibilizar aos técnicos e gerentes a flexibilidade para investir menos tempo nas tarefas de cálculo e contar com mais tempo para identificação de formas de melhorar o processo. Esta nova tecnologia fornece aos gerentes a oportunidade de utilizar modelos de monitoramento estatístico mais refinados que reflitam, verdadeiramente, o processo produtivo, possibilitando o relaxamento de algumas suposições do controle estatístico tradicional, as quais, na prática, são freqüentemente violadas. Por exemplo, os gráficos de controle tradicionais, incluindo Shewhart, média exponencialmente ponderada (EWMA) e somas acumuladas (CUSUM) foram construídos sob a suposição de que as observações do sistema produtivo são independentes e identicamente distribuídas (I.I.D), de acordo com uma distribuição normal centrada na média do processo:

$$X_t = \mu + a_t \quad (1)$$

Onde:

$X_t$  : representa a característica de qualidade no tempo (instante)  $t$ ;

$\mu$  : representa a média fixa;

---

<sup>1</sup> Neste trabalho, controle estatístico do processo (CEP) e monitoramento estatístico do processo são utilizados como sinônimos.

$\alpha_t$ : representa a sequência de erros independentemente distribuídos com média zero e variância  $\sigma_a^2$ .

Autores como BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974), VASILOPOULOS & STAMBOULIS (1978), ALWAN & ROBERTS (1988, 1995), WARDELL et. al.(1994), HARRIS & ROSS (1991), MONTGOMERY & MASTRANGELO (1991) argumentam que as hipóteses necessárias para a correta utilização da expressão (1) não são contempladas pela maioria dos processos industriais. Sob tais circunstâncias os gráficos de controle tradicionais constituem ferramentas inadequadas para monitorar o sistema produtivo, em virtude de aumentar a incidência de alarme falso, conduzindo à gerência a conclusões errôneas e induzindo a uma falsa segurança de que o processo esteja em estado de controle estatístico com falha na identificação de variação sistemática do processo.

Portanto, os gerentes devem libertar-se do paradigma Shewhart-Deming, passando a monitorar e prever a qualidade futura do sistema produtivo através da família de modelos de média móvel integrado autoregressivo – ARIMA popularizado por BOX & JENKINS (1976) e disponíveis na maioria dos programas computacionais de estatística disponíveis no mercado.

## 1.2. IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

Em um ambiente muito competitivo como o setor industrial a melhoria contínua do processo só pode ser alcançada a partir do momento em que se tenta inserir novos procedimentos ou novas metodologias, mediante a utilização de técnicas de planejamento e análise estatística mais sofisticadas. Desta forma, o trabalho em questão torna-se relevante à medida em que procura fornecer subsídios para a aplicação destas técnicas na melhoria contínua dos processos já existentes na empresa objeto do estudo.



### 1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO

#### 1.3.1. Objetivo Geral

O trabalho em questão tem como objetivo maior o fato de servir de base para uma correta orientação no que diz respeito a utilização da metodologia de gráficos de controle no monitoramento estatístico e no controle automático do processo para variável contínua autocorrelacionada em sistemas produtivos.

#### 1.3.2. Objetivos Específicos

Entre os objetivos específicos que norteiam o trabalho, pode-se mencionar:

- Enfatizar a utilização da metodologia proposta por ALWAN & ROBERTS;
- Explorar a sinergia entre as áreas de controle de engenharia do processo e controle estatístico de processo;

### 1.4. ASPECTOS METODOLÓGICOS DO TRABALHO

As metodologias adotadas de séries temporais e controle estatístico do processo, respectivamente, teve como base os dados fornecidos pelo setor de Planejamento e Controle da Produção (PCP) da empresa Omega S.A, para a característica de qualidade *Descentralização da Roda (mm)*, no período fevereiro a junho de 1998.

Partiu-se da possibilidade de aplicação dos conceitos de monitoramento estatístico e ajuste simultâneo, almejando uma nova forma de aprendizagem sobre a estrutura do processo produtivo, permitindo alcançar de forma mais racional a melhoria contínua da qualidade.

Assim, são consideradas as seguintes hipótese para a viabilização do estudo em questão:

- A sequência de observações da característica de qualidade  $\{X_t\}$  é formada por variáveis aleatórias e identicamente distribuídas (I.D);
- O conhecimento da metodologia de Box - Jenkins visando identificar o modelo de série temporal  $ARIMA(p, d, q)$ ;
- A existência de um sistema responsivo e de uma variável de controle para caracterizar o controle estocástico;
- A utilização de gráficos de controle para o monitoramento do sistema;
- A utilização do gráfico de ajuste limitado (BAC)<sup>2</sup> com vistas a indicar a necessidade de regulação através da variável de controle do sistema.

### 1.5. AS LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Face as dificuldades de acesso as aplicações reais de gráficos de controle junto as indústrias localizadas no Parque Industrial da Zona Franca de Manaus, o presente trabalho limita-se a análise de um único posto de monitoramento no período fevereiro a junho de 1998, dentro do sistema de controle estatístico do processo em uso na empresa Omega S.A. Por outro lado, o estudo descrito também não aborda os índices de capacidade do processo, admitindo-se que o processo produtivo seja capaz de implementar as alterações a serem realizadas.

---

<sup>2</sup> O termo BAC significa *Bounded Adjustment Chart*, sendo utilizado para representar o termo em português gráfico de ajuste limitado.

## 1.6. ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho foi dividido nos seguintes capítulos:

- *Capítulo 1* – Apresenta-se uma visão geral e introdutória deste trabalho, sua justificativa, seus objetivos e suas devidas limitações;
- *Capítulo 2* – Fornece uma breve revisão da literatura disponível sobre Controle Estatístico de Processos (CEP) e Ajuste Automático de Processos (APC)<sup>3</sup> para dados autocorrelacionados seguindo uma cronologia histórica;
- *Capítulo 3* – Desenvolve a fundamentação teórica referente aos gráficos de controle para variável contínua, iniciando com abordagem clássica, seguindo com a classificação através de somas acumuladas referente ao trabalho de LAI (1974) e, finalizando com apresentação da abordagem para dados autocorrelacionados;
- *Capítulo 4* – Mostra a fundamentação teórica referente a análise de séries temporais, iniciando com modelos estacionários e não estacionários, seguindo com os modelos de verificação e, no final, uma apresentação sobre a controle estocástico e sua sinergia com o controle estatístico do processo;
- *Capítulo 5* – Analisa os dados com base na teoria dos modelos  $ARIMA(p, d, q)$ , e demonstra a implementação do gráfico BAC, além de apresentar os resultados e as discussões baseadas nesta teoria;
- *Capítulo 6* – Apresenta as considerações finais e algumas recomendações com vistas a continuação de trabalhos futuros.

---

<sup>3</sup> O termo APC significa *Automatic Control Process*, sendo utilizado para representar o termo em língua portuguesa controle automático do processo. Neste trabalho, APC é utilizado como sinônimo de controle dinâmico.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura está centrada nos autores que proporcionaram as maiores contribuições para o trabalho ora apresentado. Os autores são mencionados de forma cronológica, buscando transmitir uma sequência histórica lógica dos fatos científicos mais relevantes associados ao assunto desta dissertação.

### 2.1 – REVISÃO DE LITERATURA

O moderno controle estatístico do processo teve seu início na década 20 nos Estados Unidos da América, especificamente na empresa Bell Telephone onde um grupo de pesquisadores estavam empenhados em solucionar os problemas de produzir grandes volumes de equipamentos eletrônicos, com elevada qualidade, para a rápida expansão do sistema telefônico. Em 1924, Walter Shewhart apresentou o primeiro gráfico de controle e mostrou como utilizá-lo de forma racional para monitorar e controlar o processo produtivo. A idéia do gráfico de controle é pró-ativa no sentido de que pretende-se monitorar o processo, sinalizando quando os pontos estão fora de controle e desse modo asseguram produtos com qualidade.

Os gráficos de Shewhart utilizados no monitoramento da média do processo, tem sido criticados por sua relativa ineficiência em identificar pequenas alterações no nível médio do processo. Assim, outros gráficos foram criados para computar o efeito conjunto de várias amostras até o instante  $t_o$ , por exemplo, PAGE (1954, 1957) e BARNARD (1959) propuseram um gráfico de controle simples, utilizando as somas acumuladas na identificação de pequenas oscilações no nível do processo produtivo, não detectáveis pelo gráfico de Shewhart. Este procedimento utiliza o teste da razão de verossimilhança sequencial com o objetivo de testar a hipótese nula ( $H_o$ ) de que a média do processo é igual ao valor desejado  $T_o$ , contra a hipótese alternativa ( $H_a$ ) de que os desvios são proveniente de alguma quantidade específica ( $T \neq T_o$ ).

Uma importante suposição em aplicações de gráficos de controle é a de que as observações utilizadas no monitoramento do processo devem constituir variáveis aleatórias I.I.D – *Independentes e Identicamente Distribuídas*. Desta forma, estudos de JOHNSON & BASGSHAW (1974) e HARRIS & ROSS (1991) mostraram que os gráficos de Shewhart e de somas acumuladas (CUSUM) são sensíveis a presença de dados autocorrelacionados,

especialmente quando a autocorrelação é extrema. Especificamente, a presença de autocorrelação nos dados conduz ao crescimento no número de alarmes falsos. ALWAN & ROBERTS (1995), por sua vez, demonstram que muitos alarmes falsos podem ocorrer na presença de níveis moderados de autocorrelação.

As condições que conduzem a dados autocorrelacionados podem ser resultantes do sistema de mensuração, da dinâmica do processo ou de ambos os aspectos. Todavia, vários métodos têm sido propostos para tratar dados autocorrelacionados. Um dos primeiros trabalhos sobre este assunto foi abordado por BOX & JENKINS (1963), onde os autores desenvolveram um dos primeiros gráficos de controle utilizados para avaliar dados correlacionados. Admitindo que a característica de qualidade,  $X_t$ , afasta-se do valor desejado conforme um modelo ARIMA(0, 1, 1), eles construíram um gráfico cujos ajustes nos limites de controle permitem minimizar o custo total do processo produtivo.

Caso o processo em estudo seja melhor descrito através do modelo autoregressivo de segunda ordem – AR(2), VASILOPOULOS & STAMBOULIS (1978) modificaram os limites dos gráficos  $\bar{X}$  e  $S$  especificamente para este modelo. WARDELL, MOSKOWITZ & PLANTE (1994) partiram da suposição de que o processo era descrito através de um modelo misto ARMA ( $p, q$ ), onde consideraram o uso de gráficos de controle tradicionais (Shewhart e EWMA) com limites de controle modificados, ou seja, utilizam a estrutura de autocorrelação do modelo ARMA( $p, q$ ) para estimar o desvio padrão do processo.

A aproximação mais usual ao considerar dados autocorrelacionados tem sido ajustar um modelo de série temporal adequado para as observações e aplicar gráficos de controle tradicionais nos resíduos provenientes deste modelo. ALWAN & ROBERTS (1988); MONTGOMERY & FRIENDMAN (1989); MONTGOMERY & MASTRANGELO (1991) além de WARDELL, MOSKOWITZ & PLANTE (1994) sugerem essencialmente o uso de dois gráficos para a implementação: o primeiro é o gráfico de causa comum e o segundo é o gráfico de causa especial, que consiste em um gráfico de controle para observações individuais (gráfico  $X_i$ ) aplicado aos resíduos.

O gráfico de causa comum CCC – *Common Cause Chart* – consiste no gráfico sequencial dos valores previstos pelo modelo de série temporal. Como os resíduos podem ser considerados variáveis aleatórias I.I.D, uma mudança no sistema semelhante a uma atualização no processo ou uma causa assinalável deve aumentar o valor absoluto do resíduo.

Assim, o gráfico de causa especial (SCC) – *Special Cause Chart* – produz um mecanismo eficiente para identificar alterações no processo. WARDELL, MOSKOWITZ & PLANTE (1994) mostram que estes dois gráficos possuem boa capacidade de identificar grandes alterações ( $\Delta \geq 3\sigma$ ) no nível do processo.

Conquanto HARRIS & ROSS (1991) e ALWAN & ROBERTS (1995) sugerem a utilização da análise de intervenção, na forma descrita por BOX & JENKINS (1976) para medir o efeito da existência de causa especial ou intervenção ocorrida no instante  $t_0$ , resultando em uma alteração imediata e permanente de magnitude  $\Delta$  no nível do processo produtivo. Ainda assim, PRASAD et. al. (1998) procuram utilizar o procedimento de análise de intervenção sugerido por CHEN & LIU (1993), onde conseguem estabelecer através de simulações uma associação entre os diferentes tipos de valores espúrios<sup>4</sup>, com o surgimento de possíveis causas específicas da área de qualidade.

A redução da variabilidade é uma importante etapa do processo de melhoria contínua da qualidade em qualquer tipo de indústria. O CEP, como mencionado anteriormente, constitui uma eficiente ferramenta na redução da variabilidade através da habilidade dos gráficos de controle em detectar causas assinaláveis. Quando as causas assinaláveis são expurgadas, a variabilidade do processo é reduzida, e o desempenho do processo produtivo é melhorado.

Vale salientar que, em algumas situações industriais, mesmo com grandes esforços, o processo continuará a afastar-se do nível desejado para a produção. Isto ocorrerá em função da variação contínua da matéria-prima, efeitos de temperatura, etc., ou pode ser devido a ocorrência de forças desconhecidas que influenciam o processo produtivo caracterizando a autocorrelação intrínseca ou sistema de variação comum. Nestes casos, BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974) propuseram um procedimento para reduzir a variabilidade do processo, onde uma variável de controle é ajustada com o intuito de manter o nível do processo vinculado a determinado valor especificado. Esses esquemas de regulação ou compensação são amplamente conhecidos como controle de engenharia do processo, controle estocástico, controle *feedback* ou controle automático do processo (APC – *Automatic Process Control*).

---

<sup>4</sup> O termo *outliers* foi traduzido como valor espúrio. CHEN & LIU (1993) classificam os valores espúrios em quatro categoria: *Innovational Outliers* (IO), *Additive Outliers* (AO), *Level Shift* (LS) e *Temporary Change* (TC). Para maiores esclarecimentos sobre o assunto veja seção 4.5

Atualmente, existe um considerável interesse em interagir estas duas estratégias, CEP e APC, no sentido de tirar o máximo proveito das duas técnicas. BOX & KRAMER (1992) discutem a correspondência e diferença entre as duas aproximações, enfatizam que a diferença fundamental reside no fato de que o CEP é construído inicialmente para o monitoramento do processo, realizando ações corretivas somente quando existir evidências concretas de que, de fato, ocorreu uma alteração, enquanto o APC é construído primeiramente para compensar o processo quando a remoção da variação é inviável ou está muito dispendioso do ponto de vista econômico.

BAXLEY (1990) sugere o uso da estatística EWMA como uma ponte natural entre monitoramento estatístico e controle automático do processo; VANDER, WEIL, TUCKER, FALTIN & DOGANAKSOY (1992), a partir de um caso real, mostram como elaborar um modelo combinado APC/CEP, BOX & LUCENO (1997) sustentam que o CEP e APC constituem métodos complementares, enfatizando os ganhos com o uso conjunto destas duas metodologias. Advogam que o sistema de monitoramento seja realizado através da estatística de Fisher, Cuscore, aplicada na série  $\{e_t\}$  e o sistema de ajuste seja realizado pelo gráfico BAC (*Bounded Adjustment Chart*) conforme sugerido por BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974).

Finalmente, no capítulo ora discorrido, procurou-se apresentar boa parte do suporte teórico descrito por distintos autores da área de Controle Estatístico de Processo (CEP) e Controle Automático de Processo (APC) a qual fundamentará os capítulos subsequentes.

### 3. GRÁFICO DE CONTROLE

Tradicionalmente, os gráficos de controle são desenvolvidos supondo que a sequência de observações do processo sejam independentes. Infelizmente, esta suposição é freqüentemente violada. A presença de autocorrelação produz um efeito danoso sobre o desempenho dos gráficos de controle aumentando consideravelmente a frequência de alarmes falsos.

As seções abaixo abordarão os seguintes aspectos: a seção 3.1 apresenta as definições básicas inerentes aos gráficos de controle. Na seção 3.2, leva-se em consideração o fato de que o processo produtivo seja constituído por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, sendo apresentados os gráficos Shewhart, MOSUM, EWMA e CUSUM utilizados na identificação e eliminação de causas especiais. Finalizando, a seção 3.3 traz o método de monitoramento estatístico para observações autocorrelacionadas, estruturado no relaxamento da suposição de independência para modelar a estrutura de correlação serial existente no processo.

#### 3.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

A manufatura de um produto sempre envolve certa quantidade de variação nas condições de sua fabricação. O resultado desta flutuação natural é que a característica de qualidade  $X$  observada em cada produto –  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – também estará sujeita a esta variabilidade. Em processos produtivos bem delineados tais variações são pequenas e não podem ser atribuídas a fatores controláveis, ou seja, constituem causas aleatórias.

Sob tais condições, diz-se que o processo produtivo está em estado de controle estatístico. No entanto, durante o andamento do processo produtivo, pode-se observar que alguns pontos começam a distanciar dos demais, indicando mudanças significativas nos fatores controláveis do processo em estudo.

O propósito primário dos gráficos de controle é monitorar continuamente enquanto o processo estiver sobre estado de controle estatístico. A utilização das cartas de controle supõe que o estado de controle estatístico esteja caracterizado por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (I.I.D)



Partindo-se do que foi exposto anteriormente, é possível definir o gráfico de controle de Shewhart como sendo a representação gráfica de uma característica de qualidade calculada a partir de uma amostra aleatória  $X_1, X_2, \dots, X_N$  constituídas por variáveis aleatórias independentes geralmente coletadas em intervalos de tempo constantes. Enquanto, os valores registrados estiverem entre os limites de controle e sua distribuição em torno da linha central obedecer a uma função de distribuição probabilidade, o processo será considerado sob estado de controle estatístico.

A figura abaixo representa um típico gráfico de controle de Shewhart onde a linha central (LC) representa o valor baseado na experiência do processo ou na estimativa preliminar do processo produtivo descrito pela característica de qualidade quando o processo produtivo encontra-se sob controle estatístico. As outras duas linhas representam os limites superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC). Cabe salientar que os limites de controle são especificados de modo que a estatística  $\bar{g}(X)$  alcance ou exceda-os para uma pequena probabilidade  $\alpha$ , ou seja,  $\Pr[\bar{g}(X) \notin (LSC, LIC)/\text{processo está em controle estatístico}] = \alpha$ .

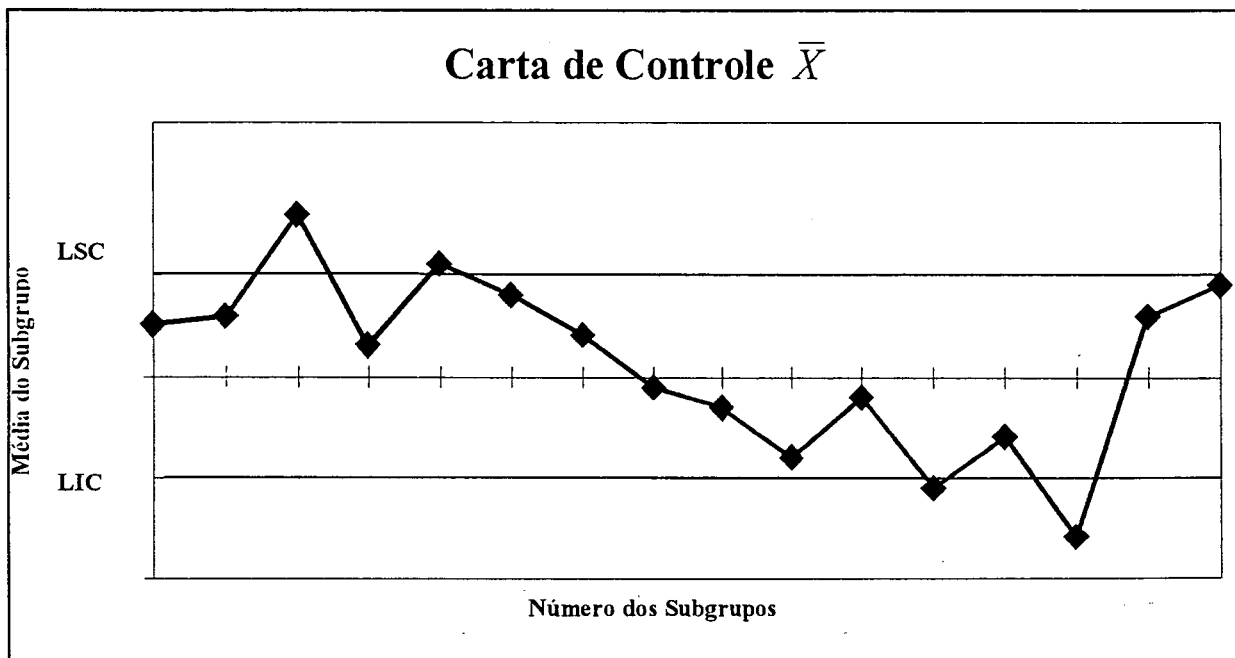


FIGURA 1 – GRÁFICO DE CONTROLE DE SHEWART

- Teste de Hipóteses e Gráficos de Controle

Existe uma estreita relação entre gráficos de controle e testes de hipótese, ou seja, um gráfico de controle é um teste em que a hipótese nula é a de que o processo está sob controle estatístico.

$H_O$ : o processo produtivo está sob controle estatístico. ( $\theta = \theta_0$ ) (3.1)

$H_A$ : o processo produtivo não está sob controle estatístico. ( $\theta \neq \theta_0$ )

Quando um valor observado da amostra  $X_1, X_2, \dots, X_N$  é registrado dentro dos limites de controle, aceita-se a hipótese nula, e nenhuma ação corretiva deve ser adotada. A região de aceitação para  $H_O$  será composta pelo conjunto de todos os resultados da estatística  $g(X)$  que estejam dentro dos limites de controle.

Quando um valor observado da amostra  $X_1, X_2, \dots, X_N$  é registrado fora dos limites de controle, rejeita-se a hipótese nula, e uma ação corretiva deve ser realizada. A região de rejeição para  $H_O$  será composta pelo conjunto de todos os resultados da estatística  $g(X)$  que estejam fora dos limites de controle. Como em qualquer teste de hipótese pode-se pensar em erros tipo I ( $\alpha$ ) e tipo II ( $\beta$ ) que ocorrem quando:

- ◆ Rejeita-se a hipótese  $H_O$  de que o processo está sob controle estatístico, quando na realidade deveria aceitar a hipótese nula, caracteriza-se, desta forma, o alarme falso com probabilidade  $\alpha$ . A incidência do erro tipo I ou alarme falso aumenta quando o distanciamento entre os limites de controle diminuem;
- ◆ Quando se aceita a hipótese  $H_O$  de que o processo está sob controle e, na realidade, não está, caracterizando o erro negligenciado com probabilidade  $\beta$ . A incidência do erro tipo II ou erro negligenciado aumenta com o afastamento dos limites de controle.

- Função Poder como Forma de Avaliação do Desempenho do Gráfico de Controle:

As linhas de controle visualizadas na figura 1 constituem os limites do intervalo de variação do teste estatístico dado que o processo esteja sob controle estatístico. As linhas de controle 99,073% representam os limites entre a região de aceitação e rejeição do teste de hipótese (3.1) para um nível de significância  $\alpha = 1\%$ .

Por trás de cada gráfico de controle existe um teste de hipótese. Partindo-se da premissa de que todo teste de hipótese pode ser completamente caracterizado através da função poder ou alternativamente pela função curva de operação (CO), geralmente utiliza-se uma destas funções para descrever o desempenho dos gráficos de controle.

Em conjunto com a função poder e função curva de operação (CO), existe um terceiro instrumento utilizado para descrever o desempenho dos gráficos de controle denominado de função ARL (*Average Run Length*). Define-se ARL como sendo o tempo médio até que uma observação esteja fora dos limites de controle. Normalmente, deseja-se que o ARL seja grande quando nenhuma causa especial tenha ocorrido e seja pequeno caso o processo apresente distúrbio.

### 3.2. TIPOS DE GRÁFICOS DE CONTROLE

Existem várias formas de classificar os gráficos de controle. Um critério bastante difundido é classifica-los segundo a forma de mensuração da característica de qualidade, dividindo-os em gráficos de controle por atributo e gráficos de controle por variável.

- a) Os gráficos de controle por atributo utilizam apenas variável aleatória discreta com função de densidade de probabilidade de Poisson, na confecção da carta C, e função de densidade de probabilidade Binomial na elaboração da carta  $p$ .

- b) Os gráficos de controle por variável empregam apenas variável aleatória contínua regidas pela função de densidade de probabilidade Normal ( $\mu, \sigma$ ).

Quando os gráficos de controle monitoram simultaneamente diferentes características de qualidade são denominados de gráficos de controle multivariados. Neste estudo, a abordagem limita-se aos gráficos de controle univariados aplicados em variáveis contínuas. Suponha que o sistema produtivo esteja fora de controle quando o nível da característica de qualidade  $\theta$  exceder  $\theta_0$ . Sejam  $m$  amostras  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$  de tamanho  $n$ , obtidas sucessivamente em intervalos regulares de tempo antes de uma ação retificadora. Os elementos amostrais  $X_{ik}, i = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , podem ser sintetizados na forma vetorial  $\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \dots, X_{in})$ , e a estatística  $G_i = g(\vec{X}_i)$  é calculada a partir de  $\vec{X}_i$ .

LAI (1974), define a variável aleatória  $Y_t$  como sendo:

$$Y_t = a_t + \sum_{j=1}^t b_j g(\vec{X}_j) \quad (3.2)$$

Desta forma,  $Y_t$  pode ser escrita como função de  $(G_1, G_2, G_3, \dots, G_t)$  e dependendo da escolha dos coeficientes  $b_1, b_2, \dots, b_t$  pode-se construir diferentes gráficos de controle. Considera-se a seguir quatro casos especiais:

- Caso 1: Gráfico de Shewhart
- Caso 2: Gráfico MOSUM – *Moving Sum*
- Caso 3: Gráfico EWMA – *Exponential Weight Moving Average*
- Caso 4: Gráfico CUSUM – *Cumulative Sum*

### 3.2.1. Caso 1 – Gráfico de Shewhart

Os gráficos de Shewhart utilizam a estatística  $S_i = g(X_i)$ . Comparando esta estatística com a equação (3.2) observa-se, facilmente, que a combinação linear,  $Y_t$ , é obtida com:

$$a_t = 0$$

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{para } j = t \\ 0, & \text{para } j = 1, 2, \dots, t-1 \end{cases}$$

A escolha da função  $g(X_t)$  recair entre as estatísticas média, mediana ou observações individuais. Por exemplo, se optar pela média  $\bar{X}_{tn}$  da amostra realizada no tempo  $t$  para um subgrupo de tamanho  $n \geq 1$ , obtém-se o gráfico de Shewhart para média, ou seja,  $Y_t = \bar{X}_{tn}$ .

MITTAG & RINNE (1993) mostram que se as observações  $X_t$  forem independentes e identicamente distribuídas com  $N(\mu, \sigma_o^2)$  os limites assintóticos do gráfico de controle para o monitoramento do nível do processo são escritos como:

$$LC = \begin{cases} \hat{\mu}_o \pm L_S \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}, & \text{se } S_t = \bar{X}_{tn} \\ \hat{\mu}_o \pm L_S \frac{\sigma_o c_n}{\sqrt{n}}, & \text{se } S_t = \tilde{X}_n \\ \hat{\mu}_o \pm L_S \sigma_o, & \text{se } S_t = X_t \end{cases} \quad (3.3)$$

Onde:

$c_n$ : representa o valor utilizado na tabela de fatores especiais;

$n$ : representa o tamanho do subgrupo;

$L_S = 1, 2$  ou  $3$ .

Em geral, o multiplicador  $L_S$  é posicionado em  $3\sigma_o$  de forma que a probabilidade de observar uma realização da estatística  $g(X_t)$  fora do intervalo (LSC, LIC) apresente erro tipo I igual a 1%. As principais vantagens dos gráficos de Shewhart são sua simplicidade e velocidade impetuosa na identificação de grandes desvios ( $\Delta \geq 3\sigma_o$ ) no nível do processo produtivo.

Tradicionalmente, o posicionamento dos limites em  $3\sigma$  para os gráficos de controle estrutura-se no desejo de evitar falsas indicações de ausência de controle. Contudo, esta propriedade produz um gráfico insensível para localizar, rapidamente, pequenas alterações ( $\Delta \leq 2\sigma_0$ ) do processo. Por exemplo, LUCAS (1973) menciona um ARL em torno de 44 amostras para que o gráfico de observações individuais consiga detectar uma alteração permanente de um desvio padrão.

Em geral, para qualquer gráfico de Shewhart pode-se expressar o ARL como sendo:

- $ARL_o = \frac{1}{\alpha}$ ; para um processo em estado de controle estatístico (3.4);

e

- $ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$ ; representa o comprimento médio para identificação da alteração na média ocorra na primeira amostra subsequente. (3.5)

Duas alternativas bastante eficientes em relação ao gráfico de Shewhart podem ser utilizadas quando existir o interesse em mensurar pequenas alterações no sistema produtivo são: 1) gráfico de média móvel exponencialmente ponderada ou EWMA; 2) gráfico de soma acumulada ou CUMUM. Tais gráficos são apresentados nos casos 3 e 4, respectivamente.

### 3.2.2. Caso 2 – Gráfico MOSUM

Suponha que a série de observações individuais  $X_1, X_2, \dots, X_n$  esteja disponível, o gráfico de média móvel (MOSUM) de comprimento  $w$  é definida através da estatística:

$$M_t = \frac{1}{w} \sum_{j=t-w+1}^t g(X_j) \quad (3.6)$$

Comparando esta estatística com a equação (3.2) observa-se, facilmente, que a combinação linear,  $Y_t$ , é obtida fazendo:

$$a_t = 0$$

$$b_j = \begin{cases} \frac{1}{w}, & \text{para } \forall j = t - w + 1, \dots, t \text{ onde } 1 \leq t \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A escolha da função  $g(X_j)$  na equação (3.6) recai entre as estatísticas média ( $\bar{X}$ ), mediana ( $\tilde{X}$ ) ou observação individual ( $X_i$ ). Por exemplo, caso a opção seja pela média amostral  $\bar{X}_m$  então, obtém-se o gráfico MOSUM da média, ou seja:

$$M_t = \frac{1}{w} \sum_{j=t-w+1}^t \bar{X}_j$$

Para  $g(X_t) = \tilde{X}_{t,n}$ ,

$$M_t = \frac{1}{w} \sum_{j=t-w+1}^t \tilde{X}_{t,n}$$

e  $g(X_t) = X_t$

$$M_t = \frac{1}{w} \sum_{j=t-w+1}^t X_j$$

Se as observações da característica de interesse  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  forem admitidas independentes e identicamente distribuídas com  $N(\mu, \sigma_o^2)$ , os limites assintóticos do gráfico MOSUM para o monitoramento do nível do processo são:

$$LC = \begin{cases} \hat{\mu}_o \pm L_M \sigma_o \frac{1}{\sqrt{wn}}, & se \quad g(X_t) = \bar{X}_m \\ \hat{\mu}_o \pm L_M \sigma_o \frac{c_n}{\sqrt{wn}}, & se \quad g(X_t) = \tilde{X}_n \\ \hat{\mu}_o \pm L_M \sigma_o \frac{1}{\sqrt{w}}, & se \quad g(X_t) = X_t \end{cases} \quad (3.7)$$

Onde:

$c_n$ : representa o valor utilizado na tabela de fatores especiais;

$n$ : representa o tamanho do subgrupo;

$L_M = 1, 2$  ou  $3$ .

### 3.2.3. Caso 3 – Gráfico EWMA

Com a introdução das técnicas de controle de qualidade através do trabalho de Walter Shewhart, os esquemas de controle tem encontrado uma ampla aplicação industrial. Embora, BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974) tenham demonstrados que o gráfico EWMA possui propriedades ótimas em aplicações de previsão e controle, estas continuam sendo largamente negligenciadas como ferramenta pelos analistas da qualidade. Recentemente, autores como HUNTER (1986), LUCAS & SACCUCCI (1990), MONTGOMERY & MASTRANGELO (1991), seguindo os estudos de ROBERTS (1959)<sup>5</sup>, enfatizam o uso do gráfico de média móvel geométrica<sup>6</sup> em aplicações de controle de qualidade.

Da mesma forma que os gráficos Shewhart e MOSUM, o esquema de controle baseado na média móvel exponencialmente ponderada é facilmente implementado e interpretado. O gráfico EWMA utiliza a seguinte estatística

$$H_t = \lambda g(X_t) + (1 - \lambda)H_{t-1}, \text{ onde } 0 < \lambda \leq 1 \quad (3.8)$$

<sup>5</sup> Roberts (1959) foi um dos primeiros pesquisadores a sugerir a utilização do gráfico EWMA em aplicações de controle de qualidade.



É interessante observar que, caso a constante de suavização  $\lambda$  seja igual a 1, a estatística EWMA na equação (3.8) é idêntica a estatística do gráfico Shewhart. Caso  $\lambda = 0$ , o gráfico EWMA simplesmente ignora o dados mais recentes da característica de qualidade em estudo, por esta razão tal escolha deve ser evitada.

A demonstração de que a estatística  $H_t$  constitui, de fato, uma média ponderada para todas as observações, pode ser obtida desenvolvendo recursivamente a equação (3.8). Então, tem-se:

$$\begin{aligned}
 H_t &= \lambda g(X_t) + (1-\lambda)H_{t-1} \\
 H_{t-1} &= \lambda g(X_{t-1}) + (1-\lambda)H_{t-2} \\
 H_{t-2} &= \lambda g(X_{t-2}) + (1-\lambda)H_{t-3} \\
 H_{t-3} &= \lambda g(X_{t-3}) + (1-\lambda)H_{t-4} \\
 H_{t-4} &= \lambda g(X_{t-4}) + (1-\lambda)H_{t-5} \\
 &\vdots \\
 H_2 &= \lambda g(X_2) + (1-\lambda)H_1 \\
 H_1 &= \lambda g(X_1) + (1-\lambda)H_0
 \end{aligned}$$

Generalizando tem-se:

$$H_t = (1-\lambda)^t H_0 + \sum_{j=0}^t \lambda(1-\lambda)^j g(X_{t-j}) \quad (3.9)$$

Onde:

$H_0$ : representa o valor de inicialização, geralmente representado pelo nível médio do processo ou qualquer outro valor desejado ou especificado pela gerência.

Rescrevendo a equação (3.9) como uma combinação linear, conforme a equação (3.2) tem-se:

---

<sup>6</sup> Em virtude dos pesos decrescerem geometricamente, o gráfico EWMA é também denominado de média móvel geométrica (GMA – *Geometric Moving Average*)

$$\begin{cases} a_t = (1 - \lambda)^t H_o \\ b_j = \lambda(1 - \lambda)^j \end{cases} ; \text{ para } \forall j = 1, 2, 3, \dots, t.$$

Cabe lembrar que a escolha da função  $g(X_t)$  na equação (3.9) deve recair entre as estatísticas média, mediana ou observações individuais. Por exemplo, caso a opção seja pela média  $t$ -ésima amostra  $\bar{X}_m$  então, obtém-se o gráfico EWMA da média, ou seja:

$$H_t = \lambda \bar{X}_{t,n} + (1 - \lambda)H_{t-1}$$

Para:  $g(X_t) = \tilde{X}_{t,n}$ ,

$$H_t = \lambda \tilde{X}_{t,n} + (1 - \lambda)H_{t-1}$$

e  $g(X_t) = X_t$ ,

$$H_t = \lambda X_t + (1 - \lambda)H_{t-1}$$

Se as observações da característica de interesse  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  forem admitidas independentes e identicamente distribuídas com  $N(\mu, \sigma_o^2)$ , os limites assintóticos do gráfico EWMA para o monitoramento do nível do processo podem ser escritos como:

$$LC = \begin{cases} \hat{\mu}_o \pm L_H \sigma_o \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)n}}, & \text{se } g(X_t) = \bar{X}_m \\ \hat{\mu}_o \pm L_H \sigma_o \sqrt{\frac{\lambda c_n}{(2 - \lambda)n}}, & \text{se } g(X_t) = \tilde{X}_n \\ \hat{\mu}_o \pm L_H \sigma_o \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}, & \text{se } g(X_t) = X_t \end{cases} \quad (3.10)$$

Onde:

$c_n$ : representa o valor utilizado na tabela de fatores especiais;

$n$ : representa o tamanho do subgrupo;

$L_H = 1, 2$  ou  $3$ .

O gráfico EWMA desenvolvido para variáveis aleatórias I.I.D. constitui um dos métodos gráficos que auxiliam a correção da deficiência dos gráficos de Shewhart – insensibilidade na identificação de pequenas alterações no nível do processo produtivo. Outro método gráfico utilizado para corrigir a indiferença da estatística  $S_t$  é a soma acumulada originalmente desenvolvida por PAGE (1954) e popularizada por LUCAS (1976). A habilidade do gráfico EWMA em identificar pequenas alterações na média do processo é similar ao gráfico CUSUM. (BAXLEY, 1990)

Embora tenha-se enfatizado o uso do gráfico EWMA essencialmente como ferramenta para o monitoramento do processo produtivo, existe uma ampla variedade de aplicações para este gráfico. Uma característica interessante do gráfico da média geométrica, pouco explorada pelos usuários, é a previsão de tendência não estacionária do nível do processo, permitindo que a média do processo oscile livremente ao longo do tempo. Este aspecto é muito importante para a indústria onde várias características utilizadas para mensurar a qualidade do produto apresentam tendência no tempo, pois as previsões do EWMA podem ser utilizadas na determinação de ajustes *feedback* necessários para manter o nível do processo próximo ao valor desejado.

No capítulo 4 mostra-se que a média exponencialmente ponderada constitui um caso particular do modelo de série temporal IMA abordado por BOX & JENKINS (1976). Na seção 4.6, admitindo que o modelo IMA represente a tendência não estacionária do nível do processo, emprega-se a estatística EWMA para construir um modelo de controle dinâmico que possa determinar a quantidade de ajustes necessários para compensar o efeito da variação intrínseca do processo.

#### 3.2.4. Caso 4 : Gráfico CUSUM

Diferente dos gráficos de Shewhart que são hábeis em detectar grandes alterações nos processos industriais, PAGE (1954, 1957) e BARNARD (1959) propuseram um gráfico de controle simples, utilizando a soma acumulada na identificação de pequenas oscilações no nível do processo produtivo não detectáveis pelos gráficos tradicionais. Este procedimento utiliza o teste da razão de verossimilhança seqüencial para testar a hipótese nula ( $H_0$ ) de que a

média do processo é igual ao valor desejado  $T_o$  contra a hipótese alternativa ( $H_A$ ) de que os desvios são provenientes de alguma quantidade específica ( $T_o \neq T$ ).

Nesta estrutura, a soma acumulada  $Q_t$  é obtida através da soma dos desvios  $y_1 - T_o$ ,  $y_2 - T_o, \dots, y_t - T_o$  provenientes do valor desejado  $T_o$ , para o verdadeiro nível do processo produtivo. Desta forma, a estatística utilizada no gráfico CUSUM é:

$$Q_t = \sum_{j=1}^t [g(X_j) - T_o] = -tT_o + \sum_{j=1}^t g(X_j) \quad (3.11)$$

Fazendo  $a_t = -tT_o$  e  $b_j = 1$ , para  $\forall j = 1, 2, \dots, t$  obtém-se a estrutura necessária para representar a estatística do gráfico CUSUM através de uma combinação linear de funções  $g(X_j)$ . Como os coeficientes  $b_j$ 's são invariáveis diz-se que o gráfico CUSUM possui memória uniforme. Similar aos gráficos anteriores, a escolha da função  $g(X_j)$  recai entre as estatísticas média, mediana, ou observações individuais. Por exemplo, caso a opção seja pela média  $\bar{X}_{t,n}$  da  $t$ -ésima amostra realizada no tempo  $t$ , obtém-se o gráfico CUSUM da média, ou seja:

$$Q_t = \sum_{j=1}^t (\bar{X}_{t,n} - T_o)$$

No gráfico CUSUM, os desvios  $(\bar{X}_{t,n} - T_o)$  entre a  $t$ -ésima média amostral e o valor desejado  $T_o$  são acumulados a partir do início do processo produtivo ou da última intervenção verificada no processo. Caso o nível do processo  $\mu$  seja constante, a esperança dos desvios acumulados  $E(Q_t)$  constitui uma função linear do número de amostras  $t$ , cuja inclinação é dada por  $\mu - T_o$ . É interessante observar que:

- Se a  $\mu = T_o$ , os desvios  $Q_t$  oscilam aleatoriamente em torno do eixo horizontal;
- Se a alteração  $\gamma = \mu - T_o$ , ocorreu na amostra  $t = t_o$ , então a partir deste ponto a inclinação da reta que representa o nível do processo será dada por  $|\gamma|$ ;

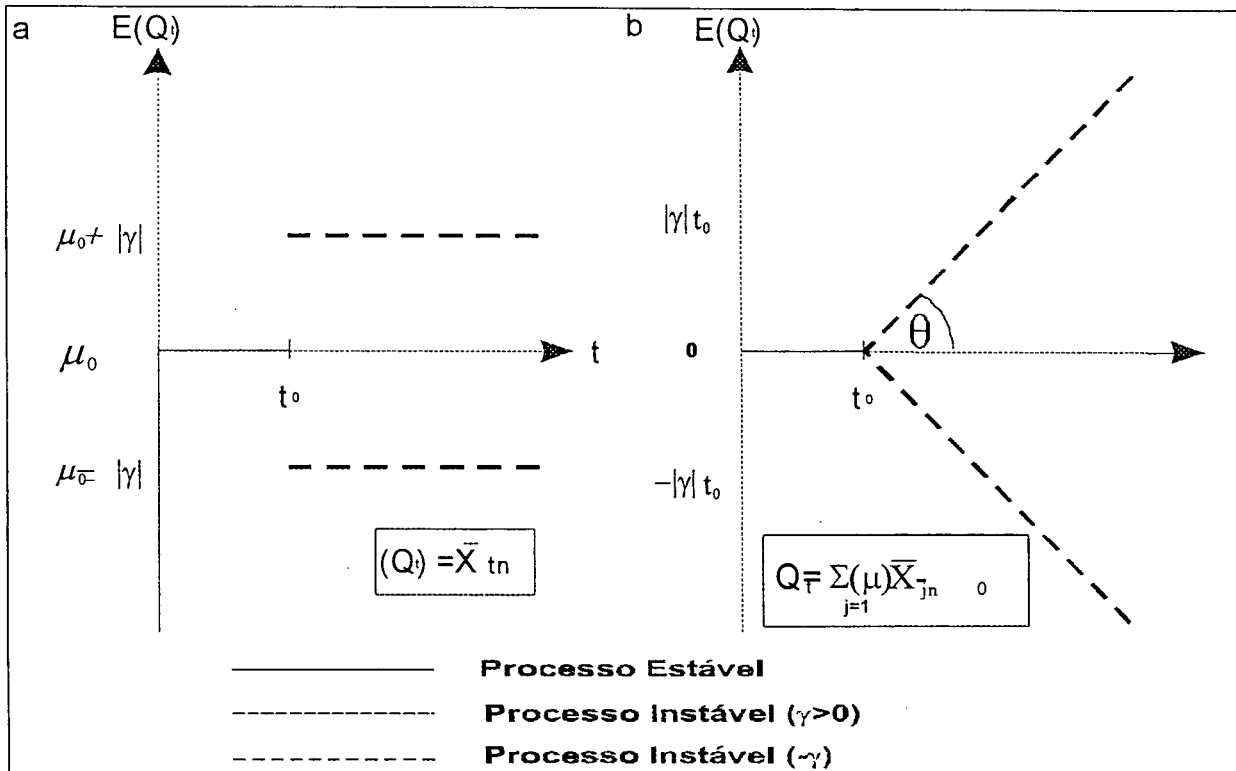


FIGURA 2 – INCLINAÇÃO DA ESTATÍSTICA CUSUM

A alteração na inclinação do gráfico CUSUM pode ocorrer como resultado de uma variação inerente dos dados, conduzindo a um alarme falso. Então, precisa-se de um procedimento que rapidamente identifique mudanças reais, mas raramente produza alarmes falsos. Utiliza-se, neste trabalho, o procedimento tabular sugerido por PAGE (1960).

O CUSUM tabular opera mediante partição de (3.11) em duas estatísticas  $Q^+$  representando agregação dos desvios que se encontram acima do valor desejado  $T_o$  e  $Q^-$  simbolizando agregação dos desvios que se encontram abaixo de  $T_o$ . As estatísticas  $Q^+$  e  $Q^-$  são expressas como:

$$\begin{aligned} Q_t^+ &= \max[0, g(X_t) - (T_o + K) + Q_{t-1}^+] \\ Q_t^- &= \max[0, (T_o - K) - g(X_t) + Q_{t-1}^-] \end{aligned} \quad (3.12)$$

E, denominadas, respectivamente, borda superior e borda inferior da soma acumulada. Na equação (3.12)  $K = k\Delta$ , para  $\forall 1\sigma_o \leq \Delta \leq 1,5\sigma_o$ , é geralmente denominado

*valor de referência* ou *folga* expresso em função da alteração que se deseja identificar no processo. O intervalo de decisão  $[-H; H]$  para a soma acumulada no esquema tabular é obtido através da expressão  $H = h\sigma_o$ , onde  $\sigma_o$  representa o desvio padrão da variável amostral utilizada na construção do gráfico CUSUM.

Os estudos de LUCAS (1973 e 1982) apresentam diversas tabelas para diferentes valores de  $h$ ,  $k$  e  $\Delta$ . Geralmente, a utilização de  $h = 4$  ou  $h = 5$  e  $k = 0,5$  produzirá um gráfico CUSUM com excelente propriedades de ARL na identificação de uma alteração permanente de  $1\sigma_o$  no nível médio do processo produtivo. Diferentemente dos gráficos de Shewhart, o uso de subgrupos racionais não introduz ganho no desempenho do gráfico CUSUM. Somente se existir algum significado de economia de escala ou alguma outra razão para utilização de amostras maiores com subgrupo maior do que  $n = 1$ , deve-se preferir o uso de observações unitárias no gráfico de soma acumulada [MONTGOMERY (1997), pp. 325].

Os limites assintóticos do gráfico CUSUM para o monitoramento do nível do processo são obtidos simplesmente substituindo  $g(X_t)$ , em (3.12), pelas observações das amostras unitárias que podem ser leituras individuais  $X_t$ , as médias dos subgrupos  $\bar{X}_{t,n}$  ou as medianas  $\tilde{X}_{t,n}$  provenientes de um plano de amostragem, ou seja:

$$\begin{aligned} Q_t^+ &= \max[0, \bar{X}_t - (T_o + K) + Q_{t-1}^+] \\ Q_t^- &= \max[0, (T_o - K) - \bar{X}_t + Q_{t-1}^-] \end{aligned}$$

Para  $g(X_t) = \tilde{X}_{t,n}$  tem-se:

$$\begin{aligned} Q_t^+ &= \max[0, \tilde{X}_{t,n} - (T_o + K) + Q_{t-1}^+] \\ Q_t^- &= \max[0, (T_o - K) - \tilde{X}_{t,n} + Q_{t-1}^-] \end{aligned}$$

Para  $g(X_t) = X_t$  tem-se:

$$\begin{aligned} Q_t^+ &= \max[0, X_t - (T_o + K) + Q_{t-1}^+] \\ Q_t^- &= \max[0, (T_o - K) - X_t + Q_{t-1}^-] \end{aligned}$$

Assim, encerra-se a apresentação dos gráficos de controle admitindo que a série de observações  $\{X_t\}$  seja constituída por variáveis aleatórias I.I.D. Na próxima seção a restrição de independência é flexibilizada. Apresenta-se a metodologia de ALWAN & ROBERTS (1988) cujo enfoque recai sob a estrutura de correlação sugerida pelo modelo  $ARIMA(p, d, q)$  para obter uma estimativa mais realística do desvio padrão do processo produtivo.

### 3.3. CONTROLE ESTATÍSTICO DO PROCESSO PARA DADOS AUTOCORRELACIONADOS

É razoável dizer que existe um ressurgimento no interesse pelo uso de métodos estatísticos para monitorar e controlar processos industriais. Entretanto, para que a metodologia estatística seja eficientemente utilizada é necessário que as hipóteses sobre a natureza do processo gerada a partir dos dados seja a mais realística possível.

Mencionou-se, anteriormente, que a hipótese fundamental em uma aplicação típica de gráfico de controle é a independência das observações, esta teoria exige que o processo produtivo seja modelado como:

$$X_t = \mu + \alpha_t$$

Onde:

$X_t$ : representa a característica de qualidade do processo no tempo  $t$ ;

$\mu$ : representa a média constante (fixa) do processo;

$\alpha_t$ : representa a variabilidade do processo oriunda do sistema de amostragem, mensuração e outras flutuações aleatórias. Admite-se que  $\alpha_t$  é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante  $\sigma_a^2$ ,

Em síntese, é admitido que o processo permanecerá em estado de controle estatístico até que uma causa especial ocorra. Sob esta ótica, é razoável admitir que o teste de hipótese, como visto na equação (3.1), constitua um procedimento adequado na identificação de causas especiais e sua respectiva correção com intuito de que o processo retorne ao nível desejado.

Os gráficos de controle Shewhart, MOSUM, EWMA e CUSUM foram originalmente propostos como um procedimento de teste de hipótese para detectar causas especiais e os parâmetros são escolhidos para balancear os erros tipo I e II. Estas ferramentas estatísticas continuam válidas em processos industriais que ajustam-se a suposição de variáveis I.I.D. O problema é que a maioria dos processos reais não são intrinsecamente independentes e identicamente distribuídos. Em conformidade com ALWAN & ROBERTS (1995), "...Um estudo empírico de 235 aplicações de controle de qualidade sugere que as violações das suposições nos gráficos de controle constituem regra (85% observado) e não casos isolados". Quando tais suposições não são atendidas, o posicionamento dos limites de controle estará incorreto, conduzindo a conclusões errôneas do tipo:

- ◆ Uma falsa segurança de que o processo esteja sob controle estatístico;
- ◆ Busca por causas especiais quando os dados, adequadamente analisados, sugerem a inexistência de causas assinaláveis, conduzindo ao aumento de alarme falso (erro tipo I);
- ◆ Deficiência na busca por causas especiais quando os dados, adequadamente analisados, sugerem a existência de causas assinaláveis, ocasionando o incremento do erro tipo II;
- ◆ Falha na identificação de variação sistemática do processo como: tendência, periodicidade e comportamento autoregressivo, os quais podem produzir a informações valiosas que auxiliem a melhoria contínua da qualidade.

A presença de autocorrelação nas observações tem um efeito danoso sobre os gráficos de controle desenvolvidos para a expressão (1). O efeito primário é aumentar a frequência de causas especiais geradas a partir alarmes falsos, levando a seguinte reflexão:

A presença de pontos localizados fora dos limites de controle indica a existência de causas assinaláveis ou constituem alarmes falsos induzidos pela estrutura de autocorrelação dos dados?



Nos últimos anos diversos métodos para manusear dados autocorrelacionados em aplicações de controle estatístico do processo tem constituído objeto de pesquisa de vários autores com destaque para BOX, JENKINS, & MACGREGOR (1974), VASILOPOULIS & STAMBOULIS (1978), ALWAN & ROBERTS (1988), MONTGOMERY & FRIENDMAN (1989), HARRIS & ROSS (1991), MONTGOMERY & MASTRANGELO (1991), WARDELL et. al. (1992, 1994), ALWAN & ROBERTS (1995), BOX & LUCENO (1997).

Uma das mais interessantes discussões sobre controle estatístico de processo para dados autocorrelacionados foi proposta por ALWAN & ROBERTS (1988). Estes sugerem o uso de dois gráficos denominados de gráfico de controle de causa comum e gráfico de controle de causa especial. O gráfico de controle de causa comum CCC – *Common Cause Chart* – consiste no registro dos valores previstos através de um modelo de série temporal conforme a metodologia descrita por BOX & JENKINS (1976). Cabe salientar que, formalmente, não constitui um gráfico de controle, pois não é utilizado com os respectivos limites de controles (LIC e LSC). Ao invés disso, é utilizado como sinalizador do nível corrente do processo produtivo e da evolução deste nível ao longo do tempo. Este gráfico explica, essencialmente, a variação sistemática<sup>7</sup> existente no processo produtivo, auxiliando no controle dinâmico<sup>8</sup> ou na melhor compreensão sobre como o sistema está trabalhando.

Em situações práticas, onde os dados do CEP são autocorrelacionados, a variação sistemática existente nas observações é muito maior do que a esperada e, em consequência, apresenta maior importância na composição da qualidade do produto do que os efeitos provenientes das causas especiais (WARDELL et. al., 1994). Efetivamente, é possível remover a maior parte da variação sistemática através dos seguintes procedimentos:

- Controle dinâmico do processo, como sugerido por BAXLEY (1990), para compensar o efeito deste tipo de variação;
- Planejamento de experimentos (TAGUCHI & WU 1985) para obter processos robustos que eliminem a maior quantidade possível da variação sistemática;

<sup>7</sup> No contexto deste trabalho, variação sistemática refere-se ao sistema de mudanças naturais que permeiam o processo produtivo;

<sup>8</sup> controle dinâmico refere-se as técnicas utilizadas no controle de engenharia do processo como controle *feedback* ou controle *feedforward* dependendo da natureza do ajuste. Maiores esclarecimento veja a seção 4.6

O efeito destas ferramentas para a melhoria contínua da qualidade é fortemente acrescido quando a variação decorrente de causas assinaláveis tenha sido reduzida. O gráfico de causa especial SCC – *Special Cause Chart* – proposto por ALWAN & ROBERTS (1988) é essencialmente um gráfico de controle, conforme apresentado na seção 3.3, mas ao invés de colocar as observações do processo no gráfico, utiliza-se os resíduos do modelo ARIMA ( $p, d, q$ ). Como a média dos resíduos é zero, a linha central do gráfico SCC é zero. A estimativa do desvio padrão utilizada neste gráfico consiste no desvio padrão dos resíduos,  $\sigma_R$ . Caso o modelo ARIMA( $p, d, q$ ) esteja corretamente identificado, os resíduos podem ser considerados variáveis aleatórias I.I.D. com  $\sigma_R = \sigma_a$ . Desta forma, uma mudança no sistema semelhante a uma atualização no processo ou uma provável causa assinalável deve aumentar os valores absolutos dos resíduos, estabelecendo um mecanismo eficiente para identificar possíveis alterações no sistema. Os limites de controle para o gráfico SCC são:

$$LC = \pm L_R \sigma_a \quad (3.13)$$

Onde:

$$L_R = 1, 2, 3$$

ENGLISH et. al. (1991) e WINCEK (1990) sugerem um procedimento similar utilizando os resíduos obtidos através do filtro de Kalmam. Este gráfico é utilizado na forma tradicional para detectar qualquer tipo de desvio no processo produtivo. As principais razões para maior simpatia atribuída ao procedimento de ALWAN & ROBERTS em detrimento ao procedimento de ENGLISH são descritos por WARDELL et. al. (1994) como sendo:

- Utiliza a autocorrelação existente no processo produtivo para fazer previsões sobre o comportamento da variável de interesse;
  - O gráfico de causa especial estrutura-se na suposição de que os resíduos são aleatórios, logo todas as hipóteses utilizadas na fundamentação dos gráficos de controle são atendidas
-

e, portanto, qualquer ferramenta do controle estatístico do processo pode ser utilizada, incluindo regras adicionais, gráficos de Shewhart, CUSUM entre outros;

- O gráfico de causa especial (SCC) pode ser utilizado para detectar qualquer causa assinalável, incluindo mudanças na estrutura da série temporal<sup>9</sup>;
- A metodologia utilizada para obter o gráfico de causa especial encontra-se disponível, de forma amigável, ao usuário na maioria dos programas computacionais de estatística existentes no mercado;
- Os demais métodos são descritos apenas para os modelos AR(1) e MA(1), enquanto o procedimento de ALWAN & ROBERTS é aplicado a qualquer modelo de série temporal;
- O método é freqüentemente mais eficiente na identificação de mudanças na média do processo do que os gráficos de controle tradicionais, quando o modelo ajustado for um ARMA(1, 1) [WARDELL et. al., 1992].

A construção do gráfico SCC exige um conhecimento prévio da análise de série temporal. Ademais, no próximo capítulo apresenta-se a classe de modelos de média móvel integrada autoregressivo (ARIMA), os quais podem representar vários processos estocásticos estacionários e não estacionários. Aborda-se a estratégia sugerida por BOX & JENKINS (1976) na identificação dos modelos a qual consiste de três estágios: especificação do modelo, estimação do parâmetro e verificação de diagnóstico.

---

<sup>9</sup> Mudanças estruturais na série temporal refere-se aos diferentes tipos de *outliers* (AO, IO, LS e TC) descritos na seção 4.5

## 4. ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Neste capítulo serão abordados os métodos para identificar, ajustar e diagnosticar modelos para dados autocorrelacionados. Os modelos discutidos serão apropriados para sistemas discretos, onde as observações ocorrem em intervalos de tempo igualmente espaçados.

Em modelos de previsão é usualmente admitido que os erros  $\varepsilon_t$  ( $t=1, 2, \dots, N$ ) são independentes, indicando que as observações  $Z_t$  sejam independentes. Contudo, esta hipótese é raramente encontrada na prática. Usualmente, a correlação serial pode ser esperada se os dados são coletados sequencialmente no tempo, assim, modelos que capturam a estrutura de correlação devem ser considerados. Desta forma, aborda-se uma classe especial de modelos estocásticos denominados de Média Móvel Integrado Autoregressivo – ARIMA, que apresentam uma gama de diferentes estruturas de correlação, as quais representam vários processos estacionários e não estacionários.

As seções que seguem abordarão os seguintes aspectos: A seção 4.1 apresenta as equações de autocovariância e autocorrelação amostrais. A seção 4.2 mostram os modelos estacionários com suas respectivas variâncias, função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial. A seção 4.3 tece comentários acerca dos modelos não estacionários com ênfase na classe de modelos de média móvel integrada – IMA. A seção 4.4 aborda o teste *Portmanteau* para validar a consistência do modelo especificado. A seção 4.5 utiliza a análise de intervenção para classificar o efeito das observações espúrias. E, finalmente, a seção 4.6 introduz o conceito de monitoramento e ajuste simultâneo através do gráfico de ajuste limitado proposto por BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974).

### 4.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS

Uma série temporal observada  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \dots, Z_N)$  pode ser pensada como a realização particular de um processo estocástico. Em geral, um processo estocástico pode ser descrito através de uma distribuição de probabilidade *n-dimensional*  $p(Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_N)$ . Admitindo a normalidade conjunta, a distribuição *n-dimensional* pode ser descrita por:

- a)  $N$  médias  $E(Z_1), E(Z_2), E(Z_3), \dots, E(Z_N)$ ;
- b)  $N$  variâncias  $V(Z_1), V(Z_2), V(Z_3), \dots, V(Z_N)$ ;
- c)  $\frac{N(N-1)}{2}$  covariâncias  $Cov(Z_i, Z_j) \ i < j$ .

Por exemplo, para  $N = 3$ , a distribuição é descrita por nove parâmetros: três médias, três variâncias e três covariâncias. É impossível inferir uma estrutura de probabilidade geral a partir de uma única realização do processo estocástico, em virtude de existirem apenas  $N$  observações e  $N + \frac{N(N+1)}{2}$  parâmetros desconhecidos. Logo, alguma hipótese de simplificação deve ser feita. Uma suposição, bastante razoável, é admitir a estacionaridade da série observada. A condição de estacionaridade implica que a média e variância do processo são constantes e que as autocovariâncias são obtidas pela equação:

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)] \quad (4.1)$$

e as autocorrelações:

$$\rho_k = \frac{Cov(Z_t, Z_{t-k})}{\sqrt{V(Z_t)V(Z_{t-k})}} \quad (4.2)$$

Cabe observar que as autocorrelações são adimensionais ou seja, dependem somente da defasagem temporal  $k$ . Como tais condições aplicam-se somente para os momentos de primeira e segunda ordem do processo, é também chamado de estacionariedade de segunda ordem ou fraca. As autocorrelações ( $\rho_k$ ) consideradas como função de  $k$  são referenciadas como função de autocorrelação – FAC ou correlograma. Como  $\gamma_k = \gamma_{-k}$ <sup>10</sup> e  $\rho_k = \rho_{-k}$ , somente a parte positiva será utilizada. A função de autocorrelação constitui uma poderosa ferramenta na caracterização da dependência entre as observações.

Até o presente, só foram consideradas funções teóricas de  $\gamma_k$  e  $\rho_k$ . Na prática tem-se uma série temporal finita  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \dots, Z_N$  com  $N$  observações para a qual só se pode obter

---

<sup>10</sup> Note que  $\gamma_k = Cov(z_t, z_{t-k}) = Cov(z_{t-k}, z_t) = Cov(z_t, z_{t+k}) = \gamma_{-k}$

estimativas das autocorrelações. As estimativas de autocovariância  $\gamma_k$  da série amostral podem ser obtidas pela equação:

$$c_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Z_t - \bar{Z}) \cdot (Z_{t-k} - \bar{Z})}{n} \quad (4.3)$$

Onde:

$c_k$  : estimativa da autocovariância ;

$\bar{Z}$  : média amostral da série temporal em estudo;

$n$ : número de observações remanescentes após  $k$  defasagens ,  $n = N - k$ .

As estimativas de autocorrelação  $\rho_k$  são obtidas pela equação:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Z_t - \bar{Z})(Z_{t-k} - \bar{Z})}{\sum_{t=k+1}^n (Z_t - \bar{Z})^2} \quad (4.4)$$

#### 4.1.1. Teste de Hipótese

Para a correta identificação do modelo de série temporal é necessário ter um critério que verifique se cada  $\rho_k$  é significativamente não nulo. Essa verificação pode ser realizada utilizando a aproximação de Bartlett para a variância do estimador do coeficiente de autocorrelação:

$$Var(r_k) = \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{k=1}^q \rho_k^2] \quad (4.5)$$

Quando se estima a função de autocorrelação a partir dos dados amostrais, utiliza-se o seguinte teste de hipótese para identificar a significância

$$H_0: \rho_k = 0 \text{ para todo } k > q \quad (4.6)$$

$$H_A: \rho_k \neq 0 \text{ para algum } k > q$$

Estatística do teste: 
$$t_{cal} = \frac{r_k}{\sqrt{Var(r_k)}}, \text{ onde } Var(r_k) = \frac{1}{N} [1 + 2 \sum_{v=1}^q r_v^2]$$

Regra de Decisão: Rejeita-se  $H_0$ , se  $t_{cal} > t_{n-1, \alpha}$

Desta forma, pode-se construir um intervalo de confiança aproximado para as autocorrelações ( $\rho_k$ ):

$$(r_k - t_{n-1, \alpha} \cdot \sqrt{Var(r_k)}; r_k + t_{n-1, \alpha} \cdot \sqrt{Var(r_k)}) \quad (4.7)$$

Onde:

$t_{n-1, \alpha}$ : Valor da estatística  $t$ -student com  $n-1$  graus de liberdade e nível de confiança  $\alpha$ . Na prática utiliza-se  $t_{n-1; 0,05} = 2$ .

## 4.2. MODELOS ESTACIONÁRIOS

Os modelos considerados nesta e nas próximas seções utilizam as idéias de YULE (1921, 1927) e WOLD (1938) que constataram o fato de que sucessivos valores autocorrelacionados podem ser representados como combinação linear de uma seqüência de variáveis aleatórias independentes. Sob esta ótica, o processo estocástico pode ser representado de duas formas equivalentes, a saber:

Modelo 1: um filtro linear  $Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \dots$  cuja entrada é um ruído branco  $a_t$ , ou seja, uma seqüência de perturbações aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero ( $E[a_t] = 0$ ) e variância constante  $\sigma_a$ .

Modelo 2: Um filtro linear  $Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \pi_3 Z_{t-3} + \pi_4 Z_{t-4} + \dots + a_t$  cuja entrada são valores anteriores de  $Z_t$  mais o erro atual.

O ruído branco  $a_t$  consiste numa seqüência de variáveis aleatórias independentes com média zero e variância constante,  $E[a_t] = 0$  e  $Var[a_t] = \sigma_a^2$ . A função de autocovariância da seqüência  $\{a_t\}$  é dada por:

$$\gamma_k = E(a_t, a_{t-k}) \begin{cases} \sigma_a^2, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

e a função de autocorrelação do ruído branco  $a_t$  tem a seguinte forma:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

### **Condições de Estacionaridade e Inversibilidade dos Processos Lineares**

- Estacionaridade:

O filtro linear da forma  $Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \dots$  é dito estacionário se os pesos  $\psi_j$ 's são tais que a série  $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots$  converge para  $|B| \leq 1$ , ou seja, as raízes do polinômio característico  $\psi(B) = 0$  estejam fora do círculo unitário.

- Inversibilidade:

Seja o filtro linear da forma  $Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \pi_3 Z_{t-3} + \pi_4 Z_{t-4} + \dots + a_t$ , este processo é dito inversível se os pesos  $\pi_j$ 's são tais que a série  $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \pi_4 B^4 - \dots$ , converge para  $|B| \leq 1$ , ou seja, as raízes do polinômio característico  $\pi(B) = 0$  encontram-se fora do círculo unitário. Assim, vê-se que os conceitos de inversibilidade e estacionaridade são independentes, estando a estacionaridade relacionada com a convergência do polinômio  $\psi(B)$  e a inversibilidade associada a convergência do polinômio  $\pi(B)$ .



#### 4.2.1. Processos Autoregressivos

Nesta subseção introduz-se a variância, função de autocorrelação e as condições de estacionaridade e inversibilidade dos processos autoregressivo de ordem  $p$  –  $AR(p)$ . Considere um caso especial do modelo 2, no qual somente os  $p$  primeiros termos são não nulos. O modelo pode ser escrito como:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + \phi_4 Z_{t-4} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad (4.10)$$

Onde os símbolos  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_p$  são utilizados para representar um conjunto finito de termos. O processo (4.10) é denominado de processo autoregressivo de ordem  $p$ , ou abreviadamente de  $AR(p)$ .

#### Condições de Estacionariedade dos Processo $AR(p)$

O conjunto de parâmetros ajustáveis  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_p$  de um processo  $AR(p)$  deve satisfazer a certas condições para que o processo seja estacionário. Para ilustrar, considere o processo autoregressivo de primeira ordem  $AR(1)$  dado pela seguinte equação.

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

Aplicando o operador  $B$  tem-se que:

$$Z_t = \phi_1 B Z_t + a_t$$

$$(1 - \phi_1 B) Z_t = a_t$$

$$Z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t$$

Tal como foi mencionado anteriormente, o estudo da estacionaridade está associado ao polinômio característico  $\psi(B)$ . Desta forma, deve-se rescrever o processo  $AR(1)$  como sendo um filtro linear cuja entrada é uma sequência de ruído branco  $\{a_t\}$ .

Utilizando o fato<sup>11</sup> de que a inversa da série é:  $(1 - \phi_1 B)^{-1} = 1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \dots$ , tem-se:

$$\begin{aligned} Z_t &= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \dots + \phi_1^n B^n + \dots) a_t \\ &= a_t + \phi_1 B a_t + \phi_1^2 B^2 a_t + \phi_1^3 B^3 a_t + \dots + \phi_1^n B^n a_t + \dots \\ &= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \phi_1^3 a_{t-3} + \dots + \phi_1^n a_{t-n} + \dots \end{aligned}$$

A equação acima representa o modelo 1 com pesos  $\psi_j = \phi_1^j$ . A condição de estacionaridade exige que a série  $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j$  seja convergente para  $|B| \leq 1$ . Note que

$\psi(B) = 1/\phi(B)$ , sabe-se que  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B$ . Então, se  $1 - \phi_1 B = 0 \Rightarrow B = 1/\phi_1$ . A série  $\phi(B)$  converge se  $|1/\phi_1| > 1$ , ou seja, a raiz do polinômio deve cair fora do círculo unitário para que o processo seja estacionário,  $I(0)$ , assim a condição de estacionaridade do AR(1) é:  $-1 < \phi_1 < 1$ .

Para o processo geral AR(p) vê-se que  $Z_t = \phi^{-1}(B) a_t$ , onde  $\phi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \phi_3 B^3 + \dots + \phi_p B^p$ . Se  $G^{-1}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  são raízes de  $\phi(B)$  e, rescrevendo o polinômio  $\phi(B)$  em função de suas raízes temos:

$$\phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B)(1 - G_3 B) \dots (1 - G_p B).$$

A condição de estacionaridade do modelo geral AR(p) exige que  $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \psi_4 B^4 + \dots$ , constitua uma série convergente para  $|B| \leq 1$ , ou seja,  $|G_i| \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Cabe ressaltar que esta condição é equivalente a dizer que as raízes  $G^{-1}_i$  do polinômio característico  $\phi(B)$  estão localizadas fora do círculo unitário ( $|G^{-1}_i| > 1$ ).

### **Condições de Inversibilidade do Processo AR(p)**

O estudo da inversibilidade do modelo AR(p) é realizada sobre o polinômio  $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots$ . Como somente os  $p$  primeiros termos não nulos estão representados no modelo autoregressivo de ordem  $p$  – AR(p), então, por definição,  $\pi(B)$  constitui uma série

<sup>11</sup> Sabe-se da álgebra de polinômio (inversa de uma série formal) que no anel  $K\{\{Y\}\}$  se verifica a identidade  $(1-Y)(1+Y+Y^2+Y^3+Y^4+\dots+Y^i+\dots)=1$ . Portanto a série  $(1-Y)$  possui inversa em  $K\{\{Y\}\}$ .

finita, não sendo necessário nenhuma restrição sobre os parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_p$  para assegurar a convergência de  $\phi(B)$ . Desta forma, pode-se afirmar que o modelo  $AR(p)$  é sempre inversível.

### **Função de Autocorrelação do Processo $AR(p)$**

Seja o modelo  $AR(p)$  descrito pela equação (4.10)

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + \phi_4 Z_{t-4} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

Deseja-se obter a função de autocovariância para o processo autoregressivo geral. Então, multiplicando a equação (4.10) por  $Z_{t-k}$  tem-se:

$$Z_t Z_{t-k} = \phi_1 (Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 (Z_{t-2} Z_{t-k}) + \dots + \phi_p (Z_{t-p} Z_{t-k}) + a_t Z_{t-k}$$

Aplicando o operador esperança na expressão acima tem-se:

$$\begin{aligned} E\{Z_t Z_{t-k}\} &= E\{\phi_1 (Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 (Z_{t-2} Z_{t-k}) + \dots + \phi_p (Z_{t-p} Z_{t-k}) + a_t Z_{t-k}\} \\ &= \sum_{j=1}^p \phi_j E(Z_{t-j} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}) \end{aligned}$$

Observe que  $\gamma_{k-j} = E\{Z_{t-j} Z_{t-k}\}$  e  $E(a_t Z_{t-k}) = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} E\{Z_t Z_{t-k}\} &= \sum_{j=1}^p \phi_j E(Z_{t-j} Z_{t-k}) + E(a_t) E(Z_{t-k}) \\ \gamma_k &= \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma_{k-j} \end{aligned}$$

Portanto, a função de autocovariância do modelo  $AR(p)$  é dada por:

---

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \phi_3 \gamma_{k-3} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad (4.11)$$

A função de autocorrelação do processo  $AR(p)$  é determinada multiplicando a equação (4.11) por  $1/\gamma_0$ , ou seja,  $\phi(B) \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \approx \phi(B) \rho_k$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0 \quad (4.12)$$

Substituindo  $k = 1, 2, 3, \dots, p$  na equação acima, obtém-se um conjunto de equações lineares para os parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots, \phi_p$  denominadas de Yule-Walker.

- Variância do processo  $AR(p)$ :

$$\text{Seja: } Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + \phi_4 Z_{t-4} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t.$$

Partindo da equação,

$$E\{Z_t Z_{t-k}\} = \sum_{j=1}^p \phi_j E(Z_{t-j} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k})$$

E fazendo  $k = 0$  tem-se,

$$E(Z_t Z_t) = \sum_{j=1}^p \phi_j E(Z_{t-j} Z_t) + E(a_t Z_t)$$

Observe que  $\gamma_k = \text{Cov}(Z_t Z_{t-k})$  e  $E(a_t Z_t) = \sigma_a^2$ . Então,

$$\gamma_0 = \sum_{k=1}^p \phi_k \gamma_k + \sigma_a^2$$

Dividindo por  $\gamma_0$ , tem-se:

$$\sum_{k=1}^P \phi_k \rho_k + \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0} = 1$$

Substituindo  $\gamma_0$  por  $\sigma_z^2$ ,

$$\sigma_a^2 \sigma_z^{-2} = 1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p$$

Logo, a variância do processo  $AR(p)$  pode ser escrita como sendo a razão entre a variância do ruído  $\{a_t\}$  e a equação de diferença de  $\rho_k$ .

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p} \quad (4.13)$$

Caso o modelo  $AR(p)$  esteja corretamente identificado, então  $\sigma_z = \sigma_o$  e  $\sigma_R = \sigma_a$ . Assim, o desvio padrão  $\sigma_z$  será utilizado como o verdadeiro valor para o desvio padrão do processo no cálculo dos limites de controle dos gráficos Shewhart, MOSUM, EWMA ou CUSUM e a estimativa do desvio padrão do resíduo,  $\sigma_R = \hat{\sigma}_a$ , será utilizado no cálculo dos limites do gráfico SCC demonstrados na seção 3.3 do capítulo anterior.

Quando o processo é não correlacionado os parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são nulos e  $\sigma_o = \sigma_z = \sigma_a$ .

### **Função de Autocorrelação Parcial do Processo $AR(p)$**

A correlação entre duas variáveis é às vezes devido ao fato de ambas estarem correlacionadas com uma terceira variável. No contexto de séries temporais, uma grande parcela de dependência entre  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$  pode ser devido a correlação entre estas variáveis com  $Z_{t-1}$ ,  $Z_{t-2}$ ,  $Z_{t-3}$ ,  $Z_{t-4}, \dots$ ,  $Z_{t-k+1}$ . O ajuste destas correlações pode ser realizada calculando-se as

autocorrelações parciais. Contudo, não se conhece a ordem do processo autoregressivo que pretende ajustar à série temporal. Este problema é análogo a decisão sobre o número de variáveis independentes que deve ser utilizado em uma regressão múltipla.

A autocorrelação parcial de defasagem  $k$ , denotado por  $\phi_{kk}$ , pode ser pensado como sendo o último coeficiente na regressão parcial na equação abaixo:

$$Z_t = \phi_{k1}Z_{t-1} + \phi_{k2}Z_{t-2} + \phi_{k3}Z_{t-3} + \phi_{k4}Z_{t-4} + \dots + \phi_{kk}Z_{t-k} + a_t.$$

Cada coeficiente  $\phi_{kj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , mensura o efeito nas variáveis intermediárias entre  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$ . Denota-se por  $\phi_{kj}$ , o  $j$ -ésimo coeficiente de um processo autoregressivo de ordem  $k$ , cujo último coeficiente é  $\phi_{kk}$ . O parâmetro  $\phi_{kk}$  calculado a partir da função de autocorrelação ( $\rho_k$ ) é chamada função de autocorrelação parcial. A autocorrelação parcial  $\phi_{kk}$  para defasagens maiores do que a ordem do processo autoregressivo é nula. Este fato, em conjunto com a estrutura de autocorrelação, auxiliam na determinação do modelo a ser ajustado para a série observada.

### **Estimativa da Função de Autocorrelação Parcial**

LEVINSON (1946) e DURBIN (1960) demonstraram que a função de autocorrelação parcial é estimada a partir da seguinte expressão:

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} r_j}; \quad (4.14)$$

onde  $\hat{\phi}_{kk} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \hat{\phi}_{k-1,k-j} \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, p$

Se os dados seguem um processo  $AR(p)$ , então para  $k > p$  a variância da estimativa de

$$\hat{\phi}_{kk} \text{ pode ser aproximada por : } V(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{n} \text{ para } k > p \quad (4.15)$$

Similar a função de autocorrelação, pode-se construir um teste de hipótese para averiguar a significância da estimativa  $\hat{\phi}_{kk}$ .

$$H_0: \hat{\phi}_{kk} = 0; \text{ para todo } k > p$$

$$H_A: \hat{\phi}_{kk} \neq 0; \text{ para algum } k > p$$

$$\text{Estatística do teste: } t_{cal} = \frac{\hat{\phi}_{kk}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\phi}_{kk})}}, \text{ onde } \sigma(\hat{\phi}_{kk}) = \frac{1}{\sqrt{n}}; \forall k \geq p \quad (4.16)$$

Regra de Decisão: : Rejeita-se  $H_0$ , se  $t_{cal} > t_{n-1, \alpha}$

Desta forma, pode-se construir um intervalo de confiança aproximado para as autocorrelações ( $\hat{\phi}_{kk}$ )

$$\left( \hat{\phi}_{kk} - t_{n-1, \alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}; \hat{\phi}_{kk} + t_{n-1, \alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (4.17)$$

onde:

$t_{n-1, \alpha}$ : É o valor da estatística  $t$ -student com  $n-1$  graus de liberdade e nível de confiança  $\alpha$ . Na prática utiliza-se  $t_{n-1; 0,05} = 2$ .

#### 4.2.2. Processos de Média Móvel – MA( $q$ )

Nesta seção, introduz-se a variância, função de autocorrelação e as condições de estacionaridade e inversibilidade dos processos de média móvel de ordem  $q$  – MA( $q$ ).

Outra classe de modelos surge através do filtro linear  $Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \dots$  especificando um número finito de pesos  $\psi$  não nulos ( $\psi_1 = -\theta_1, \psi_2 = -\theta_2, \dots, \psi_q = -\theta_q; j > q$ ). O processo resultante é chamado de média móvel de ordem  $q$  ou abreviadamente MA( $q$ ), dado por:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Ou de outra forma:

$$Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t \quad (4.18)$$

### Condições de Estacionaridade do MA(q)

O estudo da estacionaridade do modelo MA(q) é realizada sobre o polinômio  $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots$ , como somente os  $q$  primeiros termos não nulos estão representados no modelo de média móvel de ordem  $q$  – MA(q). Então, por definição,  $\psi(B)$  constitui uma série finita não sendo necessário nenhuma restrição sobre os parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q$  para assegurar a convergência de  $\theta(B)$ . Logo, afirmar-se que o modelo MA(q) é sempre estacionário.

### Condições de Inversibilidade do MA(q)

O conjunto de parâmetros ajustáveis  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_q$  de um processo MA(q) deve satisfazer a certas condições para que o processo seja inversível. Para ilustrar, considere o processo média móvel de primeira ordem – MA(1) – dado pela seguinte equação.

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

aplicando o operador B tem-se:

$$Z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Tal como foi mencionado anteriormente, o estudo da inversibilidade está associado ao polinômio característico  $\pi(B)$ . Desta forma, deve-se rescrever o processo MA(1) como sendo um filtro linear cuja entrada é a seqüência de observações anteriores de  $Z_t$ , ou seja:



$$Z_t(1 - \theta_1 B)^{-1} = a_t$$

$$Z_t(1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \theta_1^3 B^3 + \dots) = a_t$$

$$Z_t = -\theta_1 Z_{t-1} - \theta_1^2 Z_{t-2} - \theta_1^3 Z_{t-3} - \dots - \theta_1^n Z_{t-n} - \dots + a_t$$

A equação acima representa o modelo 2 com pesos  $\pi_j = -\theta_1^j$ , para  $\forall j = 1, 2, 3, \dots$ ; a condição de inversibilidade exige que a série  $\pi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j = \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta_1^j) B^j$  seja convergente para  $|B| \leq 1$ . Note que  $\pi(B)\theta(B) = 1$ , onde  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B$ . Fazendo  $1 - \theta_1 B = 0$ , tem-se  $B = 1/\theta_1$ . A série  $\theta(B)$  converge se  $|1/\theta_1| > 1$ , ou seja a raiz do polinômio  $\theta(B)$  deve cair fora do círculo unitário para que o processo seja inversível, assim a condição de inversibilidade do MA(1) é:  $-1 < \theta_1 < 1$ .

Na representação autoregressiva infinita  $(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \pi_4 B^4 - \dots) Z_t = a_t$ , os pesos  $\pi$ 's são dados por  $\pi(B) = \frac{1}{\theta(B)}$ , onde  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ . Se  $H_i^{-1}$ , para  $\forall i = 1, 2, \dots, q$  são raízes de  $\theta(B)$  e, rescrevendo o polinômio  $\theta(B)$  em função de suas raízes tem-se:

$$\theta(B) = (1 - H_1 B)(1 - H_2 B) \dots (1 - H_q B)$$

A condição de inversibilidade do modelo geral MA(q) exige que  $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \pi_4 B^4 - \dots$ , constitua uma série convergente para  $|B| \leq 1$ , ou seja,  $|H_i| \leq 1$ , para  $\forall i = 1, 2, \dots, q$ . Cabe ressaltar que esta condição é equivalente a dizer que as raízes  $H_i^{-1}$  do polinômio característico  $\theta(B)$  estão localizadas fora do círculo unitário, ou seja  $|H_i^{-1}| > 1$ .

### **Função de autocorrelação do processo MA(q)**

Seja o modelo MA(q) descrito pela equação (4.18), deseja-se obter a função de autocovariância e autocorrelação para o processo de média móvel geral. Então,

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_k a_{t-k} - \theta_{k+1} a_{t-k-1} - \theta_{k+2} a_{t-k-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$Z_{t-k} = a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \dots - \theta_{q-k} a_{t-q} - \theta_q a_{t-k-q}$$

Multiplicando  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$  e aplicando a esperança matemática tem-se:

$$E[Z_t Z_{t-k}] = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_k a_{t-k} - \theta_{k+1} a_{t-k-1} - \theta_{k+2} a_{t-k-2} - \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \dots - \theta_{q-k} a_{t-q} - \theta_q a_{t-k-q})]$$

$$E[Z_t Z_{t-k}] = -\theta_k E[a_t^2] + \theta_1 \theta_{k+1} E[a_{t-1}^2] + \theta_2 \theta_{k+2} E[a_{t-2}^2] + \theta_3 \theta_{k+3} E[a_{t-3}^2] + \dots + \theta_q \theta_{q-k} E[a_{t-q}^2]$$

$$\gamma_k = -\theta_k \sigma_a^2 + \theta_1 \theta_{k+1} \sigma_a^2 + \theta_2 \theta_{k+2} \sigma_a^2 + \theta_3 \theta_{k+3} \sigma_a^2 + \theta_4 \theta_{k+4} \sigma_a^2 + \dots + \theta_q \theta_{q-k} \sigma_a^2$$

Então, a função de autocovariância do modelo MA( $q$ ) é expresso pela equação

$$\gamma_k = \begin{cases} -\theta_k \sigma_a^2 + \theta_1 \theta_{k+1} \sigma_a^2 + \theta_2 \theta_{k+2} \sigma_a^2 + \dots + \theta_q \theta_{q-k} \sigma_a^2, & \text{para : } \forall k = 1, 2, 3, \dots, q \\ 0, & \text{para : } \forall k > q \end{cases} \quad (4.19)$$

A função de autocorrelação do processo MA( $q$ ) é determinada multiplicando a equação (4.16) por  $1/\gamma_0$ , ou seja,  $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$  obtendo com isso:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = E[Z_t Z_t] = E[a_t^2] + \theta_1^2 E[a_{t-1}^2] + \theta_2^2 E[a_{t-2}^2] + \dots + \theta_q^2 E[a_{t-q}^2]$$

$$= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 = \sigma_a^2 \sum_{k=0}^q \theta_j^2 \quad (4.20)$$

A equação (4.17) representa a variância do processo MA( $q$ ). Logo, a função de autocorrelação do processo MA( $q$ ) pode ser escrita como:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \dots + \theta_q^2)}, \text{ para } \forall k = 1, 2, \dots, q \quad (4.21)$$

Vale observar que a função de autocorrelação do processo MA( $q$ ) é nula para  $\forall k > q$ , ou seja, a memória do processo estende-se somente aos primeiros  $q$  parâmetros não nulos,

acima desta ordem as observações são independentes. Cabe salientar que se o modelo  $MA(q)$  estiver corretamente identificado, então  $\sigma_z = \sigma_o$  e  $\sigma_R = \sigma_a$ . Assim, o desvio padrão  $\sigma_z$ , descrito em (4.20), será utilizado como o verdadeiro valor para o desvio padrão do processo no cálculo dos limites de controle dos gráficos Shewhart, MOSUM, EWMA ou CUSUM e a estimativa do desvio padrão dos resíduos,  $\sigma_R = \hat{\sigma}_a$ , será utilizado no cálculo dos limites do gráfico SCC demonstrados na seção 3.3 do capítulo anterior.

Quando o processo é não correlacionado os parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  são nulos e  $\sigma_o = \sigma_z = \sigma_a$ .

#### 4.2.3. Processos Mistos – ARMA( $p, q$ )

Nesta seção introduz-se a variância, função de autocorrelação e as condições de estacionaridade e inversibilidade dos processos mistos ARMA( $p, q$ ).

Uma aproximação mais genérica para representar os pesos  $\psi$ 's no filtro linear  $Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \dots$ , consiste em considerar o polinômio  $\psi(B)$  como sendo a razão entre dois polinômios finitos  $\theta(B)$  e  $\phi(B)$ ,  $\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p}$ , isto conduz a uma nova classe de modelo denominado de média móvel autoregressiva – ARMA( $p, q$ ), cuja equação de diferença é dada por:

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t \quad (4.22)$$

O modelo ARMA( $p, q$ ) é dito estacionário se as raízes do polinômio característico  $\phi(B)$  estão localizadas fora do círculo unitário. Para a inversibilidade do modelo ARMA( $p, q$ ) admite-se que as raízes do polinômio  $\theta(B)$  estão posicionadas fora do círculo unitário.

**Função de autocorrelação do processo ARMA(p, q)**

Dado o modelo ARMA(p, q) descrito pela expressão abaixo, deseja-se obter a função de autocovariância ( $\gamma_k$ ) e autocorrelação ( $\rho_k$ ) para o modelo misto,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Multiplicando  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$  e aplicando a esperança matemática tem-se:

$$\begin{aligned} E[Z_t Z_{t-k}] &= \phi_1 E[Z_{t-1} Z_{t-k}] + \dots + \phi_p E[Z_{t-p} Z_{t-k}] + E[a_t Z_{t-k}] - \theta_1 E[a_{t-1} Z_{t-k}] - \dots - \theta_q E[a_{t-q} Z_{t-k}] \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E[a_t Z_{t-k}] - \theta_1 E[a_{t-1} Z_{t-k}] - \dots - \theta_q E[a_{t-q} Z_{t-k}] \end{aligned}$$

$$\text{Como: } E[a_{t-l} Z_{t-k}] = \text{Cov}(a_{t-l}, Z_{t-k}) = \begin{cases} 0, \text{ para } \forall l < k \\ \psi_{l-k} \sigma_a^2, \text{ para } \forall l \geq k \end{cases}$$

Então, a função de autocovariância do modelo ARMA(p, q) é expressa pela equação

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} - \sigma_a^2 (\theta_k \psi_0 + \theta_{k+1} \psi_1 + \theta_{k+2} \psi_2 + \dots + \theta_q \psi_{q-k}) \quad (4.23)$$

Para  $k = 0$ , obtém-se a variância do processo ARMA(p, q):

$$\sigma_z^2 = \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p - \sigma_a^2 (\psi_0 + \theta_1 \psi_1 + \theta_2 \psi_2 + \dots + \theta_q \psi_q) \quad (4.24)$$

Vale observar que se o modelo ARMA(p, q) estiver corretamente identificado, então  $\sigma_z = \sigma_o$  e  $\sigma_R = \sigma_a$ . Assim, o desvio padrão  $\sigma_z$ , descrito em (4.24), será utilizado como o verdadeiro valor para o desvio padrão do processo no cálculo dos limites de controle dos gráficos Shewhart, MOSUM, EWMA ou CUSUM e a estimativa do desvio padrão do resíduo,  $\sigma_R = \hat{\sigma}_a$ , será utilizado no cálculo dos limites do gráfico SCC demonstrados na seção 3.3 do capítulo anterior.

Quando o processo é não correlacionado os parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  e  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ , são nulos e  $\sigma_o = \sigma_z = \sigma_a$ . A função de autocorrelação do processo ARMA( $p, q$ ) é determinada multiplicando a equação (4.20) por  $1/\gamma_0$ , ou seja,  $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ . A função de autocorrelação do processo ARMA( $p, q$ ) pode ser escrita como:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \phi_3 \rho_{k-3} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \text{ para } \forall k \geq q+1 \quad (4.26)$$

### **Função de autocorrelação parcial do processo ARMA( $p, q$ )**

O estudo da função de autocorrelação amostral e da função de autocorrelação parcial amostral permite identificar os valores para  $p$  e  $q$ . O critério de julgamento utilizado para verificar se algum valor de  $p$  e  $q$  são estatisticamente significativos é:

- Sob a hipótese  $H_o$  de que o processo  $Z_t$  constitui uma média móvel de ordem  $q$  - MA( $q$ ), utiliza-se a equação de Bartlett's (4.5) para calcular o erro padrão da estimativa de autocorrelação  $r_k$  e portanto, determinar a maior ordem significativa para o polinômio  $\theta(B)$ ;
- Sob a hipótese  $H_o$  de que o processo  $Z_t$  constitui um modelo autoregressivo de ordem  $p$  - AR( $p$ ), utiliza-se a função de autocorrelação parcial (4.17) para calcular o erro padrão da estimativa de autocorrelação parcial  $\hat{\phi}_{kk}$  e a maior ordem significativa para o polinômio  $\phi(B)$ .

### **4.3. PROCESSOS NÃO ESTACIONÁRIOS**

Considere a seguir, as propriedades de uma importante classe de modelos para qual a  $d$ -ésima diferença é um processo estacionário misto ARMA. Estes modelos são denominados de processo de média móvel integrada autoregressivo ou abreviadamente ARIMA ( $p, d, q$ ).

Os modelos ARIMA dividem-se em:

- $ARIMA(p, d, 0)$  ou  $ARI(p, d)$ : modelos autoregressivos não estacionários;
- $ARIMA(0, d, q)$  ou  $IMA(d, q)$ : modelos média móveis não estacionários;
- $ARIMA(p, d, q)$ : modelos mistos não estacionários.

#### 4.3.1. Processo Autoregressivo Não Estacionário

Existem várias formas nas quais um processo pode ser não estacionário. Frequentemente, séries industriais exibem um particular tipo de comportamento não estacionário homogêneo que pode ser representado através de um modelo estocástico, constituindo uma forma modificada do modelo ARMA  $(p, q)$

Seja o modelo ARMA  $(p, q)$  dado por  $\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t$ , onde  $\phi(B)$  e  $\theta(B)$  constituem os polinômios característicos do modelo  $AR(p)$  e  $MA(q)$ , respectivamente. Como visualizado anteriormente, a estacionaridade do processo  $Z_t$  exige que as raízes  $G^{-1}_i \in \phi(B)$  estejam fora do círculo unitário,  $|G^{-1}_i| > 1$ . Uma forma natural de se obter uma série não estacionária é relaxar esta restrição, o que significa dizer que  $\exists G^{-1}$  tal que  $|G^{-1}| \leq 1$ , isto é, as raízes do polinômio  $\phi(B)$  estão localizadas dentro ou sobre o círculo unitário.

Para efeito didático, considere o modelo  $AR(1)$ ,  $(1 - \phi_1 B)Z_t = a_t$ , a condição de estacionaridade deste modelo é  $-1 < \phi_1 < 1$ . Atendida esta restrição, o modelo é dito estacionário. Mas, para qualquer valor  $\phi_1 > 1$ , o modelo torna-se não estacionário, fazendo com a série  $Z_t$  apresente um comportamento explosivo ou evolucionário, não sendo adequado na representação de dados industriais. (BOX, JENKINS & REINSEL, 1994).

Tal comportamento é essencialmente o mesmo para séries geradas a partir de processos de ordem superior ( $p > 1$ ) onde as condições de estacionaridade são violadas. Logo, para evitar o comportamento explosivo das séries industriais deve-se inserir um polinômio genérico  $\phi(B)$  composto por  $(d + p)$  raízes, sendo  $d$  raízes unitárias e  $(p - d)$  raízes localizadas fora do círculo unitário. Com tal procedimento, assegura-se a estacionaridade e evita-se a explosão da série em estudo. A partir de agora, considera-se apenas modelos que possuam pelo menos uma raiz unitária,  $d = 1$ , apresentando comportamento homogêneo não estacionário.

Seja o modelo,

$$\varphi(B)Z_t = \theta(B)a_t \quad (4.27)$$

Onde:

$\varphi(B)$ : representa o operador não estacionário e autoregressivo possuindo  $d$  raízes unitárias,  $|G^{-1}| = 1$ , e  $p-d$  raízes localizadas fora do círculo unitário, ou seja,  $|G^{-1}| > 1$ ;

$\theta(B)$ : representa o operador estacionário e inversível de médias móveis

É possível expressar o operador não estacionário como sendo  $\varphi(B) = \phi(B) \cdot (1 - B)^d$ .

Então:

$$\begin{aligned} \varphi(B)Z_t &= \theta(B)a_t \\ \phi(B)(1 - B)^d Z_t &= \theta(B)a_t \\ \phi(B)W_t &= \theta(B)a_t^{12} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Cabe salientar que o modelo (4.27), admite que a  $d$ -ésima diferença da série original  $Z_t$ , não estacionária homogênea, possa ser representada por um processo estacionário e inversível do tipo ARMA ( $p, q$ ). Logo, a condição de estacionaridade do modelo (4.26) é dada pelo polinômio característico  $\phi(B) = 0$  onde  $|G_i^{-1}| > 1$  e, a condição de inversibilidade é dada pelo polinômio característico  $\theta(B) = 0$  onde  $|H_i^{-1}| > 1$ .

#### 4.3.2. Processos de média móvel integrada – IMA( $d, q$ )

Deseja-se escrever o modelo IMA( $d, q$ ) como um filtro linear descrito pelos valores passados da série homogênea estacionária  $Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \dots + a_t$ . Tal representação

---

<sup>12</sup> Note que  $W_t = (1-B)^d Z_t = \nabla^d Z_t$ , representa uma sequência estacionária para a série original  $Z_t$

permite descrever a sequência  $\{a_t\}$  como sendo  $a_t = \pi(B)Z_t$ , substituindo na equação (4.27) tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi(B)Z_t &= \theta(B)a_t \\ \varphi(B) &= \theta(B)\pi(B) \\ \pi(B) &= \frac{\varphi(B)}{\theta(B)} = \frac{(1-B)^d}{(1-\theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)}\end{aligned}\quad (4.29)$$

A equação (4.29) descreve os pesos  $\pi$  's como a razão entre o grau de diferenciação da série  $Z_t$  e o polinômio de média móvel. Para caracterizar um importante modelo, substitua  $d=1$ ,  $q = 1$  e  $(1-B) = 1 - \theta_1 B + \theta_1 B - B$ . Então,

$$\pi(B) = \frac{1 - \theta_1 B + \theta_1 B - B}{1 - \theta_1 B} = 1 - (1 - \theta_1)B[(1 - \theta_1)^{-1}]$$

$$\pi(B) = 1 - (1 - \theta_1)B[1 - \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \dots]$$

$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \theta_1)\theta_1^{j-1} B^j$$

$$\text{Então, } \pi(B)Z_t = (1 - \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \theta_1)\theta_1^{j-1} B^j)Z_t = a_t$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \theta_1)\theta_1^{j-1} Z_{t-j} + a_t \quad (4.30)$$

Esse modelo com os pesos  $(1 - \theta_1), (1 - \theta_1)\theta_1, (1 - \theta_1)\theta_1^2, \dots, (1 - \theta_1)\theta_1^{j-1}$ , constitui uma média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) dos valores anteriores da série  $Z_t$ , caracterizado pela constante de suavização  $\theta_1$  ou equivalentemente através da medida de não estacionaridade  $\lambda = 1 - \theta_1$  assim, a série temporal definida por (4.30) é denominado modelo de média móvel integrado ou IMA.



Diversos autores com ênfase para BOX & JENKINS (1974, 1976), BAXLEY (1990), BOX & LUCENO (1997) afirmam que a maioria dos processos industriais podem ser perfeitamente representados pelo modelo de média móvel exponencialmente ponderada.

### **Principais Características do IMA**

Uma propriedade interessante e pouco abordada pelos autores é a previsão de tendência não estacionária do nível médio do processo produtivo. BAXLEY (1990) advoga que esta propriedade constitui um aspecto muito importante em aplicações industriais onde diferentes características de qualidade apresentam tendência com o tempo, podendo ser utilizada na determinação de ajustes *feedback* adequados para manter a média do processo próxima a determinado valor desejado. Desta forma, pode-se estabelecer um sistema de controle para determinar regulagens que compensem o comportamento de tendência, alertando o operador sobre a necessidade de executar ações corretivas no processo. Maiores detalhes sobre este procedimento será apresentado na seção 4.6 subsequente.

#### **4.4. MODELO DE VERIFICAÇÃO**

Após os parâmetros do modelo terem sido estimados é necessário verificar se as suposições são contempladas. Caso as suposições não sejam plenamente atendidas é necessário reestimar o modelo. Esta fase na construção do modelo é denominada de diagnóstico de verificação do modelo, apoiando-se na análise do resíduo  $\hat{a}_t$ .

Tal como mencionado anteriormente, a suposição básica nos modelos ARIMA é que a sequência  $\{a_t\}$  seja composta por variáveis independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante. Em séries extensas espera-se que o comportamento das estimativas dos resíduos  $\hat{a}_t$  seja similar à sequência  $\{a_t\}$ , evidenciando as seguintes propriedades:

- i) A média dos resíduos  $\hat{a}_t$  deve estar próxima do zero;
- ii) A variância residual deve ser homoscedástica;
- iii) As autocorrelações residuais,  $\text{Cov}(\hat{a}_t, \hat{a}_{t-1})$ , devem ser não significativas.

#### 4.4.1. Teste *Portmanteau*

BOX & PIERCE (1970) mostraram que, sob a hipótese nula de que o modelo é adequado, para grandes defasagens a distribuição das autocorrelações residuais,  $r_a(k)$ , é uma normal multivariada e a estatística  $Q^*$  tem distribuição  $\chi^2$  com  $k-p-q$  graus de liberdade.

$H_o$ : O modelo ARIMA( $p, d, q$ ) é adequado

$H_a$ : O modelo ARIMA( $p, d, q$ ) não é adequado

Estatística do teste Portmanteau:

$$Q^* = n \sum_{k=1}^K r_a^2(k); \text{ para } \forall k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (4.31)$$

Onde:

$n$ : número de observações remanescentes após a diferenciação, ou seja,  $n = N - d$ ,

$k$ : número de defasagens desejadas;

Regra de Decisão: Rejeita  $H_o$  ao nível  $\alpha$  de significância se  $Q^* > \chi_{k-p-q;\alpha}^2$

LJUNG & BOX<sup>13</sup> (1978) mostraram que a distribuição Qui-quadrada não produz uma aproximação suficientemente exata para a distribuição teórica da estatística  $Q^*$  sob a hipótese nula, propondo a seguinte alteração na estatística do teste *Portmanteau*.

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{r_a^2(k)}{n-k} \quad (4.32)$$

<sup>13</sup> Estudos de Box-Lung-Pierce (1978) demonstram que a variância de  $r_k(d)$  sob a hipótese de ser gerado a partir de uma sequência de ruído branco é  $Var[r_k(d)] = \frac{n-k}{n^2}$ , ao invés da utilização da equação de Bartlett.

A maioria dos programas computacionais disponíveis utilizam a estatística de LJUNG & BOX, para verificar a consistência do modelo  $ARIMA(p, d, q)$  desejado.

#### 4.5. ANÁLISE DE INTERVENÇÃO

Este tópico procura responder as seguintes indagações:

- 1) Por que utilizar análise de intervenção?
- 2) Quais os principais tipos de *outliers*?
- 3) Como utilizar a análise de intervenção em CEP para dados correlacionados?

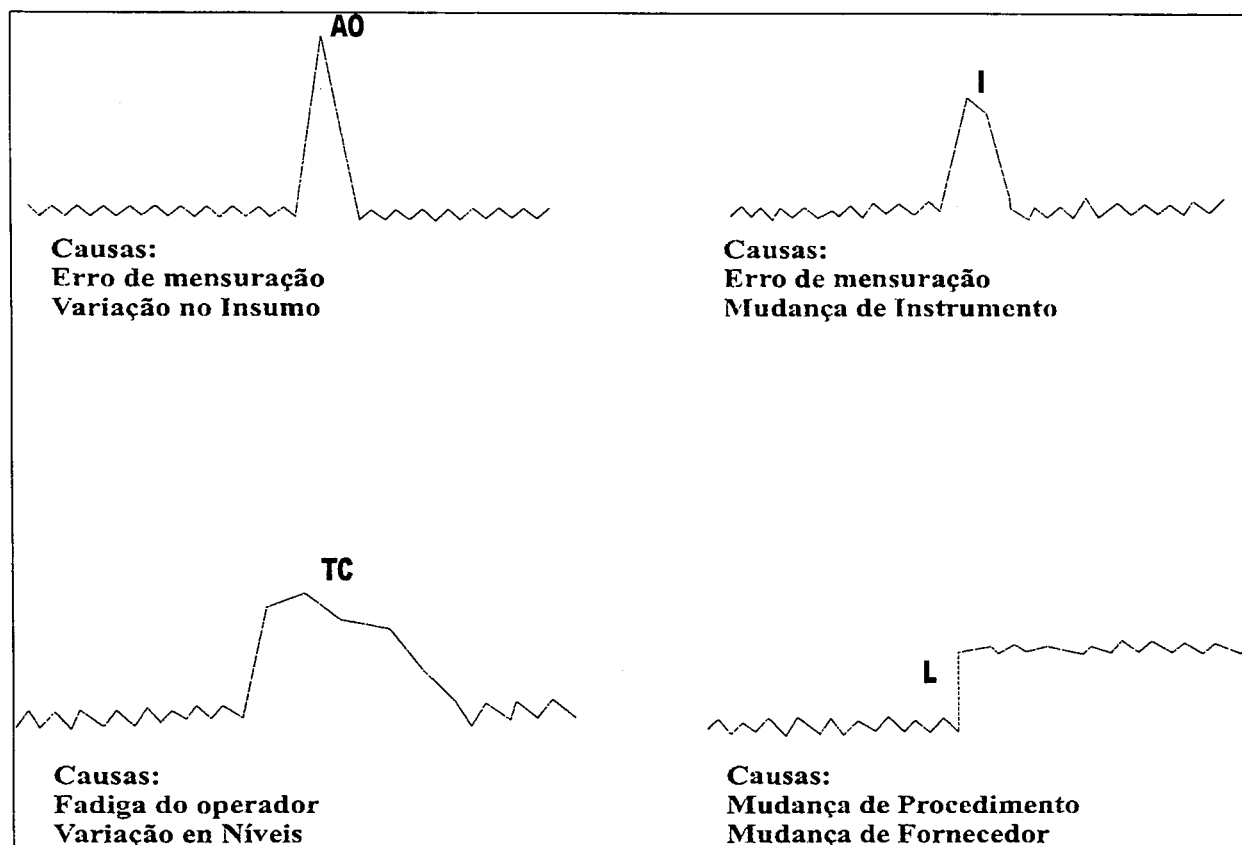
##### 4.5.1. Causas Especiais em Séries Temporais

Frequentemente, dados de séries temporais são afetados por eventos ou circunstâncias inesperadas produzindo observações espúrias. Dependendo de sua natureza, podem apresentar um impacto significativo no comportamento da função de autocorrelação, função de autocorrelação parcial, comprometendo a identificação do modelo  $ARIMA$ . A abordagem tradicional para trabalhar com valores aberrantes em séries temporais consiste em identificar a localização e a natureza do valor espúrio e, então utilizar o modelo de análise de intervenção sugerido por BOX & TIAO (1975).

Neste trabalho, utiliza-se o procedimento de estimação conjunta sugerido por CHEN & LIU (1993) para classificar o impacto das observações aberrantes dentro de quatro tipos: *Innovational Outliers* (IO), *Additive Outliers* (AO), *Level Shift* (LS), e *Temporary Change* (TC). A figura 3 ilustra como as observações aberrantes podem surgir em processos gerados a partir de um modelo  $ARIMA(p, d, q)$  e suas prováveis causas assinaláveis em aplicações de controle estatístico do processo para máquinas automáticas.

Observações espúrias do tipo AO produzem um efeito imediato e limitado a abrangência do tempo  $t_o$ , podem ser resultante de erro de mensuração ou insumo com defeito. Observações do tipo IO indicam continuidade do problema para dois ou mais períodos, e frequentemente estão associados a erros de mensuração ou mudança de instrumento. As do tipo TC caracterizam-se por um crescimento inicial seguido de queda gradual ao longo de

vários períodos, resultante da fadiga do operador, mudança de marca ou alteração entre níveis. As observações do tipo LS apresentam uma alteração repentina e permanente na série temporal, sendo explicada pela contratação de novos empregados, fornecedores, materiais ou novos procedimentos (PRASAD & BRAMORSKI, 1998).



**FIGURA 3 – CLASSIFICAÇÃO DOS *OUTLIERS* DE ACORDO COM A METODOLOGIA PROPOSTA POR CHEN & LIU (1993).**

Para descrever um modelo de série temporal sujeita a influência de observações espúrias, considerar-se-á o seguinte modelo:

$$Z_t^* = Z_t + \omega L(B)I_t(t_o) \quad (4.33)$$

Onde:

$Z_t^*$ : representa a seqüência de observações disponíveis que constituem a série temporal observada ;

$Z_t$ : representa a série temporal modelada por uma estrutura ARIMA( $p, d, q$ ), livre da presença de valores espúrios;

$\omega$ : representa a magnitude da alteração observada no nível da série temporal;

$I_t(t_o)$ : representa uma variável binária;

$L(B)$ : representa a forma funcional do efeito dinâmico para cada tipo de observação espúria;

Ou seja :

Para o caso de um valor espúrio do tipo IO:  $L(B) = \frac{\theta(B)}{\nabla^d \phi(B)}$ ;

Para o caso de um valor espúrio do tipo AO:  $L(B) = 1$ ;

Para o caso de um valor espúrio do tipo TC:  $L(B) = \frac{1}{1 - \delta B}$ ;

Para o caso de um valor espúrio do tipo LS:  $L(B) = \frac{1}{1 - B}$ .

Na prática, a série temporal pode conter várias observações aberrantes e de diversos tipos, ou seja, a série temporal  $Z_t^*$  está sujeita a  $m$  intervenções no tempo  $t_1, t_2, \dots, t_m$  resultando em vários tipos de observações espúrias. O modelo para  $Z_t^*$  pode ser expresso como:

$$Z_t^* = Z_t + \sum_{j=1}^m \omega_j L_j(B) I_t(t_j) \quad (4.34)$$

A seqüência dos resíduos ajustados  $\{\hat{e}_t\}$  proveniente do modelo (4.34) é escrita como:

$$\hat{e}_t = \alpha_t + \sum_{j=1}^m \omega_j L_j(B) I_t(t_j) \quad (4.35)$$

As equações (4.34) e (4.35) constituem a fundamentação para o procedimento proposto por CHEN & LIU (1993). Se o tipo de impacto e a localização das observações aberrantes são conhecidas então, pode-se ajustar seus efeitos utilizando a equação (4.34) e,

posteriormente, calcular as estimativas do modelo. Caso os parâmetros do modelo sejam conhecidos, pode-se identificar e estimar os efeitos das observações espúrias através da equação (4.35).

Estando a localização e os efeitos das observações espúrias corretamente estimados, uma estimativa robusta para o quadrado médio dos resíduos pode ser determinada através da variância amostral dos resíduos ajustados.

#### 4.6. MONITORAMENTO E AJUSTE SIMULTÂNEO

A redução da variabilidade constitui uma importante etapa do processo de melhoria contínua da qualidade em qualquer tipo de indústria. O CEP, como mencionado no capítulo 3, constitui uma eficiente ferramenta na redução da variabilidade através da habilidade dos gráficos de controle em detectar causas assinaláveis. Quando as causas assinaláveis são expurgadas a variabilidade do processo é reduzida, e o desempenho do processo produtivo é melhorado.

Contudo, em algumas situações industriais, mesmo com os melhores esforços, o processo continuará afastar-se do nível desejado para a produção. Isto ocorrerá em função da variação contínua da matéria-prima, efeitos de temperatura, ou entre outras coisas devido a ocorrência de forças desconhecidas que influenciam o processo produtivo caracterizando a autocorrelação intrínseca ou sistema de variação comum. Nestes casos, BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974) propuseram um procedimento para reduzir a variabilidade do processo, onde uma variável aleatória manipulável do processo produtivo é ajustada com o intuito de manter o nível do processo sob determinado valor desejado. Estes esquemas de regulação ou compensação são amplamente conhecidos como controle de engenharia do processo, controle estocástico, controle *feedback* ou controle *feedforward* dependendo da natureza do ajuste.

O objetivo, desta seção, é aplicar o conceito de controle estocástico no gráfico de variação comum (CCC), proposto por ALWAN & ROBERTS (1988), quando existir custo fixo associado a operação de regulação.

#### 4.6.1. Gráfico de Ajuste Limitado – BAC ( *Bounded Adjustment Chart* )

Os gráficos de Shewhart constituem uma excelente ferramenta para monitorar o sistema produtivo, sinalizando a possibilidade de causas especiais e suas possíveis remoções. Contudo, esses gráficos têm sido utilizados de forma equivocada para indicar a necessidade de ajuste no processo produtivo.

Ademais, um processo deve ser ajustado somente quando existir uma clara demonstração da necessidade de mudança sinalizada pelos pontos que caem fora dos limites de controle. Não obstante não constitui objetivo do sistema de ajuste, monitorar o processo produtivo na busca por anomalias que possam ser expurgadas mas, sinalizar a real necessidade de regular o processo, compensando o distúrbio que não possa ser economicamente removido. Neste contexto, utiliza-se do gráfico BAC no sistema de causa comum determinado através do gráfico CCC proposto por ALWAN & ROBERTS. Valendo lembrar que os distúrbios existentes no sistema de causa comum são representados por um dos modelo de série temporal abordados nas seções 4.2 e 4.3.

#### **Como Construir o Gráfico BAC - EWMA**

Para construir o gráfico BAC, admita-se que os dados estão disponíveis em intervalos de tempo equidistantes e que exista uma variável de controle  $X_t$ . Além disso, suponha, ainda, que:

1. Qualquer alteração realizada na variável de controle  $X(t)$  produzirá todo seu efeito sobre a característica de qualidade  $Y_t$  no período imediatamente subsequente, caracterizando, assim, o sistema responsivo;
2. Crescimento de uma unidade na variável de controle  $X_t$  induz um crescimento de  $g$  unidades na característica de qualidade em estudo. O valor de  $g$  é denominado de ganho do processo, podendo ser estimado através do modelo IMA(1, 1) ou outro modelo de série temporal;

3. Denomina-se ajuste  $(x_t)$ , onde  $x_t = X_t - X_r$ , para um  $r$  fixo,  $r \in \{1, 2, \dots, t-1\}$  para  $\forall t \geq 2$ , qualquer modificação realizada no nível da variável de manipulação. A sequência  $\{x_t\}$  é admitida ser uma série temporal onde todos os valores são nulos exceto no instante  $t = i$ ,  $t = i-1$ ,  $t = i-2, \dots$  em que ocorre o ajuste na variável de controle;
4. A série ajustada  $(y'_t)$  incorporando o efeito dos ajustes necessários ao sistema responsivo é obtida através da expressão  $y'_t = y_t + gx_t$ , onde  $y_t$  representa o sistema de variação de causa comum obtido através do gráfico CCC;
5. A série suavizada  $(\hat{y}'_t)$  é atualizada através da estatística EWMA descrita pela seguinte expressão:  $\hat{y}'_{t+1} = \lambda y'_t + \theta \hat{y}'_t$ . Os parâmetros  $\theta$  e  $\lambda$  são obtidos através do modelo de série temporal identificado no respectivo período de análise.
6. Erro  $\{e_t\}$  na saída do sistema é caracterizado pela expressão  $e_t = y'_t - \hat{y}'_t$ , ou seja, desvio entre o valor desejado,  $T_o$ , e o ajuste realizado no instante  $t$ . A série  $\{e_t\}$  será utilizada na construção da estatística de Fisher (Cuscore) para identificar possíveis anomalias no gráfico BAC durante a realização dos ajustes  $(x_t)$  no processo produtivo.

Apesar do mecanismo de cálculo do gráfico BAC ser, inicialmente, idêntico ao do gráfico EWMA tradicional, vale ressaltar, mais uma vez que não se busca identificar causas assinaláveis mas compreender a real necessidade de intervir no processo, realizando regulagens em uma determinada variável de controle  $\{x_t\}$ .

No gráfico BAC a constante de suavização  $\theta$  é estimada através do modelo de série temporal IMA, o qual procura representar o comportamento não estacionário existente nas informações. O objetivo deste gráfico é manter a variabilidade pequena e reduzir ao máximo possível a frequência de ajustes no processo produtivo. Para que isto ocorra é necessário definir alguns parâmetros:

Intervalo médio de ajuste – AAI: definido como a razão entre o número de observações existente na série e a quantidade de ajustes ocorridas no período. Crescimento do



desvio padrão – ISD: definido como a razão entre o quadrado médio da série ajustada ( $y'_t$ ) para um dado valor  $L$  e o quadrado médio da série ( $y'_t$ ) utilizando ajustes contínuos,  $\frac{L}{\hat{\sigma}_a} = 0$ , sob o nível desejado para o processo. Cabe salientar que  $L$  representa a quantidade de ruído que se aceita como variação regular na série ajustada em troca da menor frequência de ajustes no processo.

BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974), utilizando um sistema de ajuste responsivo e uma série de observações adequadamente representada através do modelo IMA(1, 1) constataram que o desvio padrão deste modelo constitui o esquema de mínima variância, devendo ser utilizado para calcular o intervalo médio de ajuste (AAI) e o percentual de crescimento do desvio padrão (ISD) para vários valores de  $\lambda$  e  $L$ .

O anexo 2 apresenta a estrutura computacional necessária para construir o gráfico BAC a partir de uma planilha EXCEL.

#### 4.6.2. Combinar Sistema de Ajuste (APC) e o Sistema de Monitoramento (CEP)

Existe um considerável interesse em interagir estas duas metodologias no sentido de retirar o máximo das duas técnicas, autores como BOX & KRAMER (1992); MACGREGOR (1992); VANDER WEIL, TUCKER, FALTIN & DOGANAKSOY (1992); BOX & LUCENO (1997), LUCENO (1998) sustentam esta idéia.

O APC admite a existência de um modelo dinâmico específico que une o processo de entrada e saída do sistema produtivo. Se o modelo for corretamente especificado, os ajustes produzidos pela equação abaixo, minimizará a variação em torno do nível desejado para o sistema produtivo em estudo.

$$gx_t = -Ge_t \quad (4.36)$$

Onde:

$G$ : representa a constante de suavização compreendida no intervalo  $0 \leq G \leq 1$ ;

$g$ : representa o ganho do sistema, ou seja, mede as alterações ocorridas na característica de qualidade do sistema para cada unidade alterada na variável  $\{x_t\}$ .

Contudo, a existência de distúrbios externos ou causas assinaláveis são freqüentemente ignorados pela metodologia APC, ocasionando crescimento na variabilidade do processo.

Com o intuito de sanar este problema, BOX & LUCENO (1997, cap.11) propõem a utilização da estatística de Fisher,  $Q_S$ , para caracterizar o monitoramento e ajuste simultâneo nos distúrbios não estacionários, descritos pelo modelo de série temporal IMA(1, 1), sujeito ao controle integral discreto de um processo responsivo, onde o ajuste  $x_t$ , descrito pela equação (4.36), é proporcional ao último desvio do valor desejado  $e_t$ , representando as regulagens necessárias aos controles integrais PI (*Proportional Integral*).

O ajuste ( $x_t$ ) realizado no sistema combinado APC/CEP continua sendo calculado pela equação  $x_t = -\left(\frac{G}{g}\right)e_t$ . Assim, para construir o respectivo sistema, adota-se, procedimento sugerido por BAXLEY (1990), BOX & LUCENO (1997), LUCENO (1997), o uso de  $G = 1 - \theta$  e  $g = \theta$ , onde  $\theta$  representa o parâmetro de média móvel proveniente do modelo de série temporal IMA(1,1) descrito anteriormente na seção 4.3.2.

A estatística Cuscore utilizada para identificar possíveis picos na série  $\{y'_t\}$  após a realização dos ajustes, descritos pela equação (4.36), é caracterizada pela seguinte expressão:

$$Q_S = De_t + (1 - D)(e_t - \tilde{e}_{t-1}) \quad (4.37)$$

Onde:

$$D = \frac{G}{\lambda}, \quad \text{sendo } \lambda = 1 - \theta,$$

$e_t$ : representa o erro da saída;

$\tilde{e}_t$ : representa o EWMA do erro da saída do processo com constante de suavização  $\theta$ .

Para compreender a sugestão dada por BOX & LUCENO (1997), considera-se a seguinte situação:

Posicionando  $G = \lambda$  implica que  $D = 1$ . Utilizando-se os resultados de BOX et. al. (1963), mostra-se que a equação (4.37) produz o esquema de controle de mínimo erro quadrático, onde a variância do erro da saída  $\{e_t\}$  é igual a variância do resíduo do modelo

IMA,  $\sigma_e^2 = \hat{\sigma}_a^2$ . Como a estatística Cuscore reduz-se a  $Q_s = e_t$ , fica claro que a variância da estatística  $Q_s$  é igual a variância do modelo IMA,  $\sigma_{Q_s}^2 = \sigma_e^2 = \hat{\sigma}_a^2$ . Isto é verdadeiro somente quando a hipótese nula,  $H_o$ , de que a série  $\{e_t\}$  constitui um ruído branco é satisfeita. Nesta situação, a utilização de gráfico de controle com os limites posicionados em  $\pm 3\hat{\sigma}_a$  permite a busca por anomalias no sistema produtivo.

Caso a série  $\{e_t\}$  não constitua um ruído branco, é necessário construir a seqüência de detectores  $\{r_t\}$  que permita rastrear corretamente anomalias em  $\{e_t\}$ . Especificamente, a série  $\{r_t\}$  pode ser obtida substituindo na equação de diferença do modelo ARIMA  $z_t$  por  $x_t$  e  $a_t$  por  $r_t$ . Por exemplo, admita que o desvio  $\{z_t\}$  seja corretamente modelado pelo modelo IMA(1, 1)

$$z_t = z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Então, a série de detectores  $\{r_t\}$  pode ser obtida através da seqüência de ajustes  $\{x_t\}$  usando a expressão

$$r_t = x_t - x_{t-1} + \theta_1 r_{t-1} \quad (4.38)$$

A estatística Cuscore apropriada para o instante  $t$  é escrita como  $Q_s = \sum_{i=1}^n a_i r_i$ , cuja variância é fornecida pela expressão:  $\sigma_Q^2 = \sigma_a^2 [\dots + r_{t-2}^2 + r_{t-1}^2 + r_t^2 + \dots]$ . A utilização de um gráfico seqüencial com limites posicionados em  $\pm 3\sigma_Q$  permite a busca por causas assinaláveis na seqüência  $\{e_t\}$  provenientes dos ajustes realizados no sistema produtivo.

Finalmente, no capítulo ora percorrido, procurou-se abordar os principais modelos de série temporal e introduzir o gráfico BAC, em virtude de constituírem a base para a aplicação do controle estatístico do processo, combinando monitoramento e ajuste simultâneo que será formulado no capítulo subsequente.

## 5. - ANÁLISE DOS RESULTADOS ENCONTRADOS

Neste capítulo, foram utilizadas as observações da característica de qualidade *Descentralização da Roda (mm)* coletadas diariamente na empresa Omega S.A no período de fevereiro de 1998 a junho de 1998, constituindo um ponto de inspeção no sistema de qualidade em uso na empresa.

As seções que seguem abordam os seguintes aspectos: A seção 5.1, apresenta uma breve descrição do processo produtivo. Na seção 5.2, realiza-se um estudo para verificar se as hipóteses dos gráficos de controle foram contempladas. Na seção 5.3, apresenta-se os modelos  $ARIMA(p, d, q)$  para cada mês em estudo, bem como o teste *Portmanteau* utilizado para verificar a existência de anomalias no modelo dinâmico, caso o teste seja significativo ( $p\text{-value} \leq 0,05$ ) o modelo é restimado. Na seção 5.4, comenta-se sobre os gráficos de causa especial SCC (*Special Cause Chart*), os gráficos de causa comum CCC (*Common Cause Chart*), e análise de intervenção sugerida por CHEN & LIU (1993) para identificar possíveis valores espúrios, associando-os a determinados tipos de problemas concernentes à área da qualidade. Na seção 5.5, mostra-se a revisão da carta de controle. Finalmente, na seção 5.6, discute-se o emprego do gráfico de ajuste limitado BAC (*Bounded Adjustment Chart*), realizado a priori, para indicar a necessidade de ajustes no sistema em perfeito estado de controle estatístico, através de uma variável de controle do processo e, a posteriori, no monitoramento, através da estatística de Fisher,  $Q_S$ , da sequência de desvios residuais decorrentes de tais regulagens.

### 5.1. UMA BREVE DESCRIÇÃO DO PROCESSO PRODUTIVO

Na presente subseção pretende-se dar uma visão genérica do processo produtivo de fabricação das rodas de bicicletas realizadas pela empresa Omega S.A., situada no parque industrial da Zona Franca de Manaus (Z. F. M.).

O processo de fabricação das rodas de bicicletas está dividido em três etapas básicas:

- A fabricação dos aros de bicicleta;
- A “enraiação” dos aros e cubos;

- Posicionamento dos pneus.

A figura 4 abaixo, apresenta o processo de fabricação dos aros que compreende as seguintes fases:

- 1ª Fase: Laminação do perfil do alumínio;
- 2ª Fase: Calandragem do perfil do alumínio;
- 3ª Fase: O corte do perfil do alumínio nas dimensões adequadas;
- 4ª Fase: A dobra do perfil do alumínio;
- 5ª Fase: A colocação dos pinos nos aros;
- 6ª Fase: O processo de soldagem.



**FIGURA 4 – PRIMEIRA ETAPA DA PRODUÇÃO DAS RODAS DE BICICLETA – FABRICAÇÃO DOS AROS**

Vê-se, ainda na figura 4, ao término das fases acima descritas o armazenamento dos aros para a segunda etapa do processo de fabricação das rodas. Já na figura 5, é fácil perceber a colocação manual dos raios no cubo, onde observa-se uma espécie de guarda-chuva nas mãos do operador. Do lado direito, visualiza-se o pré-aperto do conjunto raio-cubo no aro da bicicleta. Ao término deste processo, a roda estará praticamente montada.





**FIGURA 5 – POSICIONAMENTO DO RAIOS NO CUBO E PRÉ-APERTO DO CUBO NO ARO DE BICICLETA**

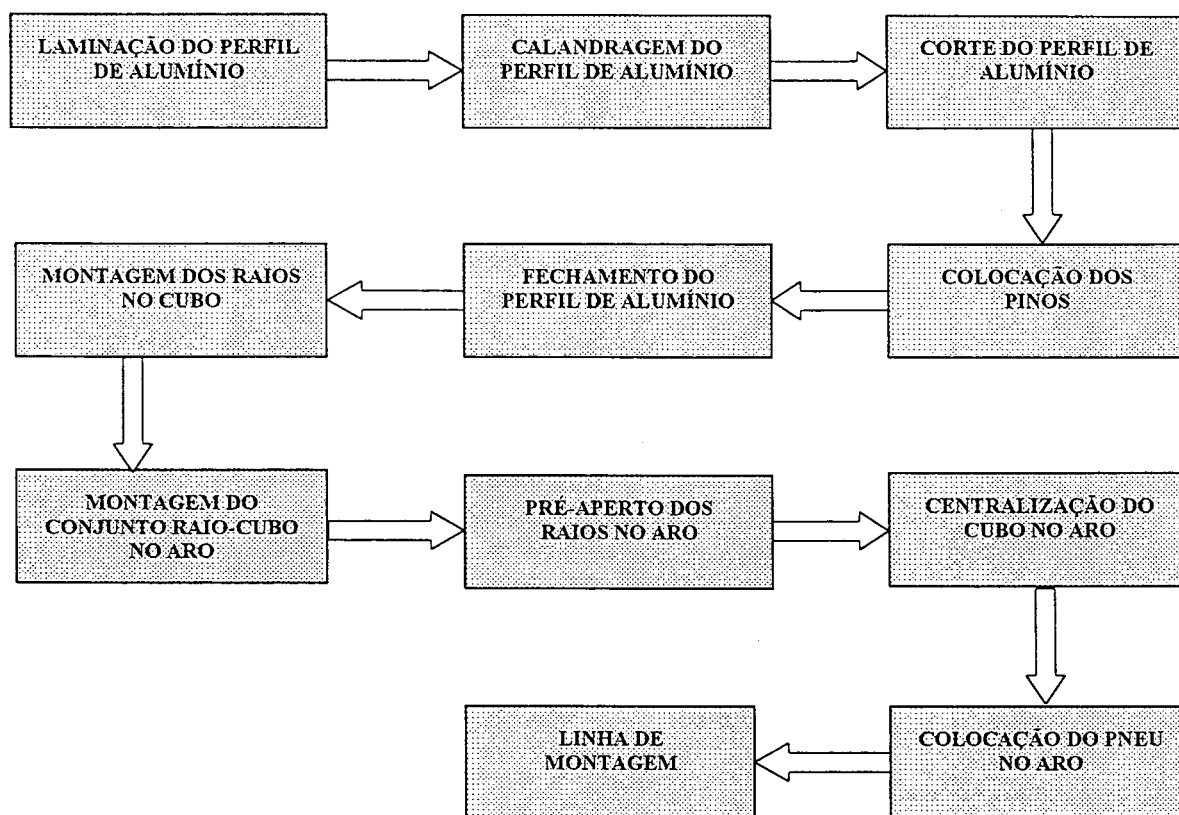
Por outro lado, a figura 6 mostra o processo de centralização automática do cubo no aro da bicicleta. Do lado esquerdo, visualiza-se a centralização radial, enquanto do lado direito, observa-se a centralização axial.



**FIGURA 6 – PROCESSO DE CENTRALIZAÇÃO DO CUBO NO ARO DE BICICLETA**

Neste trabalho, utiliza-se observações advindas da máquina de descentralização radial mostrada na figura 6 do lado esquerdo, em virtude desta, constituir um ponto relevante de inspeção dentro do sistema de monitoramento da qualidade em uso pela empresa Omega S.A.

Todas as etapas do processo, também podem ser vistas através do fluxograma abaixo:



**FIGURA 7 – FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE FABRICAÇÃO DO ARO DE BICICLETA NA EMPRESA OMEGA S.A.**

## 5.2. VERIFICAÇÃO DAS HIPÓTESES DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

Deseja-se verificar se a característica de qualidade em estudo é, de fato, constituída por variáveis aleatórias I.I.D. (independentes e identicamente distribuídas) seguindo uma função de densidade de probabilidade Normal ( $\mu$ ,  $\sigma^2$ ). Para isto, utiliza-se os testes estatísticos

não-paramétricos *Lillefors* e *Shapiro-Wilks* na averiguação da hipótese de normalidade do conjunto de dados disponível<sup>14</sup>.

Os quadros 1 e 2 apresentam a síntese dos testes não paramétricos aplicados às médias dos subgrupos e às observações individuais, respectivamente. Constata-se ao nível de 1% de significância ( $p\text{-value} \leq 0,01$ ), evidências contrárias a idéia de normalidade tanto para os subgrupos como para as observações individuais.

Quadro 1 – Síntese da Aplicação dos Testes Não-Paramétricos *Lillefors* e *Shapiro-Wilks* às Médias dos Subgrupos de Tamanho ( $n = 5$ ) no Período Fevereiro a Junho de 1998 na Variável *Descentralização da Roda(mm)* na Empresa Omega S.A

Mês	<i>Lilliefors</i>		<i>Shapiro – Wilks</i>		Estimativas	
	$T_1$	$p\text{-value}$	$W$	$p\text{-value}$	$\mu$	$\sigma_o$
Fevereiro-98	0,06062	$p > 0,20$	0,95651	$P < 0,01$	0,5794	0,0724
Março-98	0,11687	$p < 0,01$	0,95531	$p < 0,0002$	0,5689	0,0685
Abril-98	0,11468	$p < 0,01$	0,94970	$p < 0,0001$	0,5051	0,0445
Mai-98	0,10319	$p < 0,01$	0,94521	$p < 0,0001$	0,4285	0,0491
Junho-98	0,14159	$p < 0,01$	0,92054	$p < 0,0001$	0,3946	0,0295

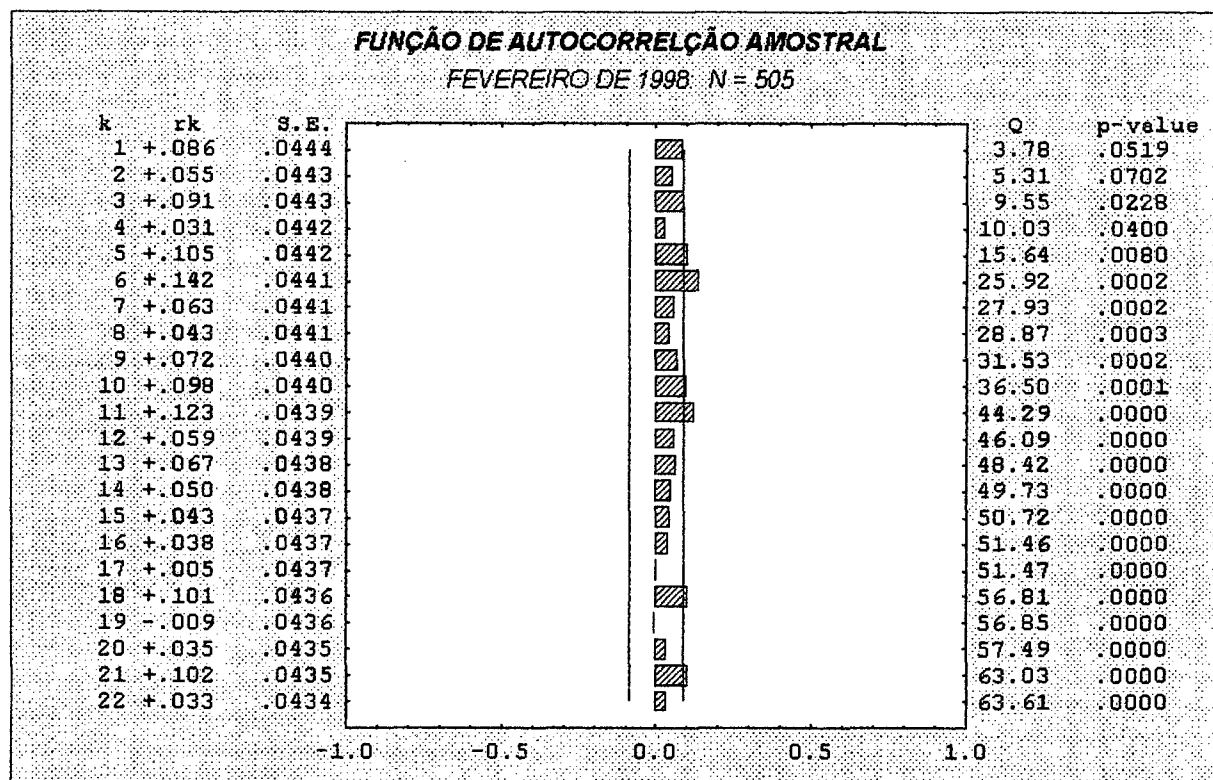
Quadro 2 – Síntese da Aplicação dos Testes Não-Paramétricos *Lillefors* e *Shapiro-Wilks* às Observações Individuais no Período Fevereiro-98 a Junho-98 na Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A.

Mês	<i>Lilliefors</i>		<i>Shapiro – Wilks</i>		Estimativas	
	$T_1$	$p\text{-value}$	$W$	$p\text{-value}$	$\mu$	$\sigma$
Fevereiro-98	0,17004	$p < 0,01$	0,92739	$p < 0,0001$	0,5794	0,1476
Março-98	0,15006	$p < 0,01$	0,92303	$p < 0,0001$	0,5689	0,1393
Abril-98	0,18130	$p < 0,01$	0,90988	$p < 0,0001$	0,5051	0,0930
Mai-98	0,19578	$p < 0,01$	0,89276	$p < 0,0001$	0,4285	0,0865
Junho-98	0,26535	$p < 0,01$	0,86310	$p < 0,0001$	0,3946	0,0658

<sup>14</sup> Detalhes sobre tais procedimento podem ser vistos em CONOVER (1971).



A suposição de independência nas observações disponíveis para a característica de interesse, no período fevereiro a junho de 1998, pode ser averiguada através da função de autocorrelação amostral ( $r_k$ ).



**FIGURA 8 – GRÁFICO DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL  $r_k$  PARA AS OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS DA VARIÁVEL DESCENTRALIZAÇÃO DA RODA (mm) COLETADAS EM FEVEREIRO DE 1998 NA EMPRESA OMEGA S.A.**

A figura 8 mostra a função de autocorrelação para 505 observações relativas a Fevereiro de 1998<sup>15</sup>. Do lado esquerdo, visualiza-se a defasagem ( $k$ ), a autocorrelação ( $r_k$ ) e o respectivo desvio padrão estimado<sup>16</sup>. Do lado direito, mostra-se a estatística *Portmanteau* ( $Q^*$ ) e o seu respectivo *p-value*. Para o nível  $\alpha = 5\%$ , verifica-se, claramente, a existência de evidências contrárias a idéia de independência dos dados, o que sugere a utilização da estrutura de correlação serial para melhor calcular a estimativa do desvio padrão do processo.

<sup>15</sup> A maioria das análises gráficas referentes aos meses subsequentes, encontram-se disponíveis em anexo.

A presença de correlação serial invalida qualquer procedimento de teste de hipótese que utilize métodos baseados em variáveis I.I.D para determinar se as alterações no sistema produtivo são significativas. A aproximação mais utilizada para flexibilizar a hipótese de independência, ou seja, admitir a existência de dados autocorrelacionados no processo, tem sido ajustar um modelo de série temporal adequado às observações individuais e aplicar gráficos de controle tradicionais nos resíduos provenientes deste modelo. Sob esta ótica, a seção subsequente apresenta os modelos dinâmicos identificados para a característica de qualidade em estudo.

### 5.3. A MODELAGEM ARIMA ( $p, d, q$ )

A estrutura de correlação serial em cada período analisado foi identificada através do estudo de várias funções de autocorrelações ( $\rho_k$ ) e autocorrelação parcial ( $\phi_{kk}$ ). Os parâmetros dos modelos de série temporal foram obtidos pelo cálculo das estimativas de máxima verossimilhança (ML) implementadas no programa computacional *Statistica for Windows*.

O quadro 3 a seguir, apresenta um resumo dos principais modelos identificados em cada mês disponível para análise. Em cada período analisado, dois ou mais modelos foram identificados e, conseqüentemente, ajustados. Cabe salientar que todos os modelos pre-selecionados utilizam operadores não estacionários ( $\nabla$ ) e termo constante nulo. A omissão do termo constante justifica-se pela suposição de que a tendência estocástica é mais realística em um processo produtivo, tal como indicado por BOX & KRAMER (1992).

---

<sup>16</sup>Foram utilizadas 22 defasagens, considerando apenas os dias úteis em que a fábrica opera em condições normais de funcionamento.

Quadro 3 – Síntese dos Resultados do Teste *Portmanteau* ( $Q^*$ ) para as Primeiras Vinte e Duas Autocorrelações Aplicadas aos Resíduos dos Vários Modelos ARIMA( $p, d, q$ ) Ajustados as Observações Individuais nos Meses Fevereiro de 1998 a Junho de 1998 da Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A.

Mês	Modelo Ajustado	ARIMA	$Q^*$	$p$ -value	$\sigma_a$
Fevereiro -98	$\nabla Fev_t = a_t - 0,9328a_{t-1}$	(0, 1, 1)	21,08	P<0,89	0,146
	$\nabla Fev_t + 2.10^{-3} \nabla Fev_{t-1} = a_t + 0,932a_{t-1}$	(1, 1, 1)	21,08	P<0,89	0,146
	$\nabla^2 Fev_t + 0,796 \nabla^2 Fev_{t-1} + 0,639 \nabla^2 Fev_{t-2} + 0,457 \nabla^2 Fev_{t-3} + 0,359 \nabla^2 Fev_{t-4} + 0,187 \nabla^2 Fev_{t-5} = a_t - 0,92a_{t-1}$	(5, 2, 1)	28,84	P<0,38	0,162
Março-98	$\nabla Mar_t = a_t - 0,9315a_{t-1}$	(0, 1, 1)	32,02	P<0,37	0,140
	$\nabla Mar_t + 0,0256 \nabla Mar_{t-1} = a_t + 0,9256 a_{t-1}$	(1, 1, 1)	30,52	P<0,44	0,140
	$\nabla Mar_t - 0,4982 \nabla Mar_{t-1} - 0,5012 \nabla Mar_{t-2} = a_t - 0,3871a_{t-1} - 0,381a_{t-2}$	(2, 1, 2)	27,21	P<0,61	0,146
Abril-98	$\nabla Abr_t = a_t - 0,9414a_{t-1}$	(0, 1, 1)	44,91	P<0,04	0,094
	$\nabla Abr_t + 0,6255 \nabla Abr_{t-1} = a_t - 0,3251a_{t-1} - 0,6574a_{t-2} + 0,0940a_{t-3}$	(1, 1, 3)	36,89	P<0,18	0,094
	$\nabla Abr_t + 0,7158 \nabla Abr_{t-1} + 0,1018 \nabla Abr_{t-2} = a_t - 0,2370a_{t-1} - 0,640a_{t-2}$	(2, 1, 2)	36,78	P<0,18	0,094
	$\nabla Abr_t = a_t - 0,3251a_{t-1} - 0,6574a_{t-2} + 0,0940a_{t-3}$	(0, 1, 3)	42,18	P<0,07	0,094
Maio-98	$\nabla Mai_t = a_t - 0,8886a_{t-1}$	(0, 1, 1)	27,91	P<0,57	0,085
	$\nabla Mai_t - 0,0337 \nabla Mai_{t-1} - 0,0226 \nabla Mai_{t-2} - 0,0244 \nabla Mai_{t-3} - 0,065 \nabla Mai_{t-4} = a_t - 0,9167a_{t-1}$	(4, 1, 1)	24,67	P<0,74	0,085
	$\nabla Mai_t - 0,0109 \nabla Mai_{t-1} - 0,0022 \nabla Mai_{t-2} - 0,0063 \nabla Mai_{t-3} = a_t - 0,893 a_{t-1}$	(3, 1, 1)	27,75	P<0,58	0,085
Junho-98	$\nabla Jun_t = a_t - 0,9636a_{t-1}$	(0, 1, 1)	64,78	P<0,002	0,065
	$\nabla Jun_t + 0,1860 \nabla Jun_{t-1} = a_t - 0,9429a_{t-1}$	(1, 1, 1)	38,71	P<0,13	0,064
	$\nabla Jun_t + 0,1948 \nabla Jun_{t-1} + 0,0280 \nabla Jun_{t-2} = a_t - 0,9386 a_{t-1}$	(2, 1, 1)	37,81	P<0,15	0,064

Uma análise detalhada do quadro 3 revela que dentro de cada mês, a diferença entre a variância residual dos modelos discriminados é muito pequena, tornando os modelos identificados similares. Desta forma utiliza-se o critério de selecionar o modelo com o menor número de parâmetros a estimar e cujos resíduos após vinte e duas defasagens constituem um ruído branco. Neste contexto, aflora o modelo ARIMA(0, 1, 1) como a estrutura mais parcimoniosa, sendo pre-selecionado em três dos cinco meses analisados, confirmando resultados de BOX, JENKINS & MACGREGOR (1974), ALWAN & ROBERTS (1988), BAXLEY (1990), BOX & LUCENO (1997), os quais advogam o uso do erro de previsão do modelo ARIMA(0, 1, 1) para identificar rapidamente grandes alterações ( $\Delta \geq 3\sigma_a$ ) em aplicações de controle de qualidade com dados autocorrelacionados.

A seguir são apresentados os modelos de série temporal utilizados para descrever o comportamento da característica de interesse *Descentralização da Roda (mm)* para cada mês em estudo.

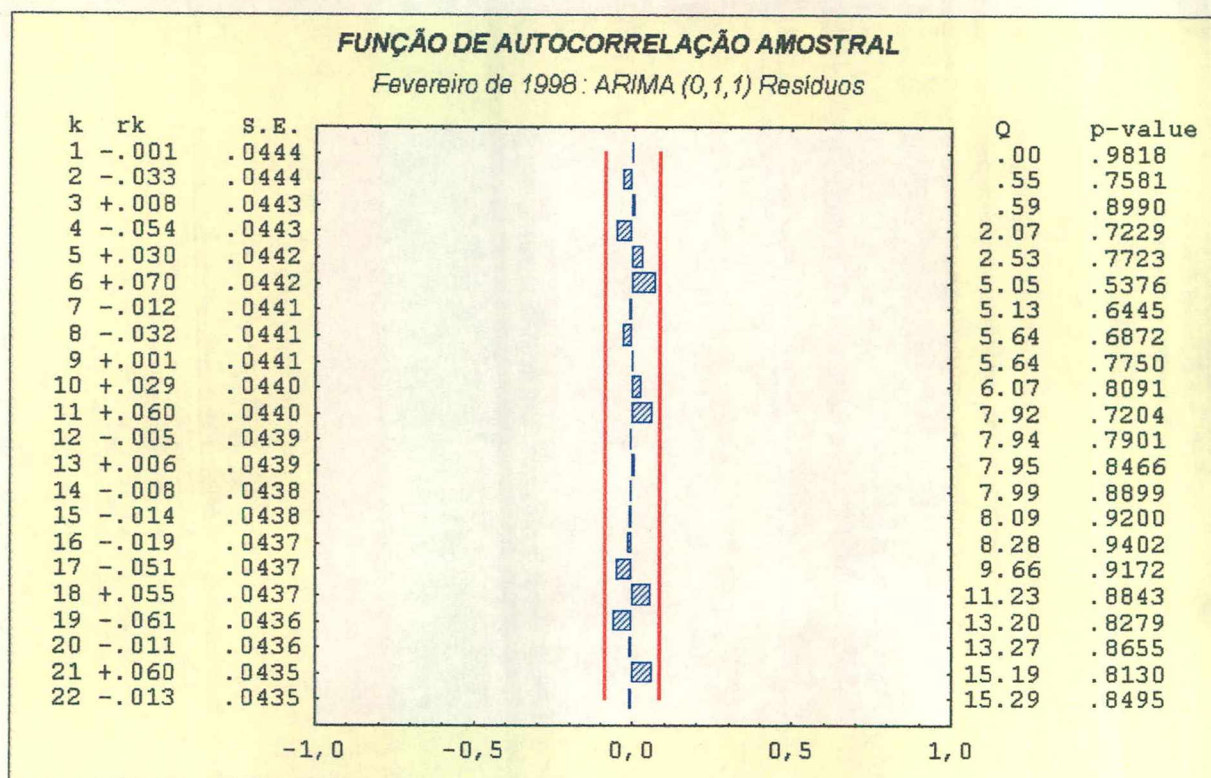
- Fevereiro de 1998

$$\hat{Fev}_t = \hat{Fev}_{t-1} - 0,938\hat{a}_{t-1}, \quad (5.2.1)$$

Onde:

$\{a_t\}$ : representa uma sequência de ruído branco com desvio padrão  $\hat{\sigma}_a = 0,1459$ ;

$\hat{Fev}_t$ : representa a característica de interesse projetada para fevereiro de 1998 no instante  $t$ ,  
 $1 \leq t \leq 505$ .



**FIGURA 9 – FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.1)**

A figura 9, acima, apresenta os resultados da análise dos resíduos, onde a função de autocorrelação amostral e o teste *Portmanteu* com o nível de significância  $\alpha = 5\%$ , sustenta a perfeita adequação do referido modelo em Fevereiro de 1998.

- Março de 1998

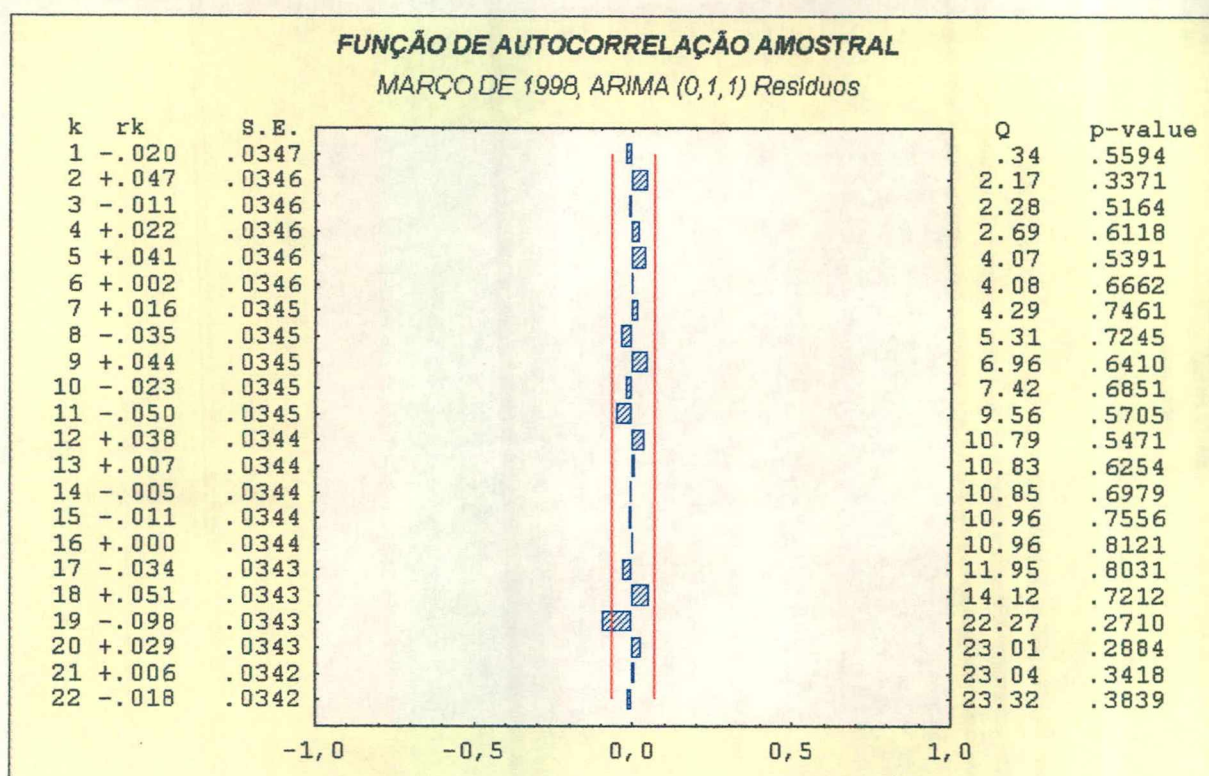
$$\hat{Mar}_t = \hat{Mar}_{t-1} - 0,931\hat{a}_{t-1}, \quad (5.2.2)$$

Onde:

$\{a_t\}$ : representa uma sequência de ruído branco com desvio padrão  $\hat{\sigma}_a = 0,1403$ ;

$\hat{Mar}_t$ : representa a característica de interesse projetada para março de 1998 no instante  $t$ ,  
 $1 \leq t \leq 830$ .





**FIGURA 10 – FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.2)**

Já a figura 10, procura apresentar os resultados da análise dos resíduos, onde a função de autocorrelação amostral e o teste *Portmanteu*, com o nível de significância  $\alpha = 5\%$ , sustenta a perfeita adequação do modelo referente a Março de 1998.

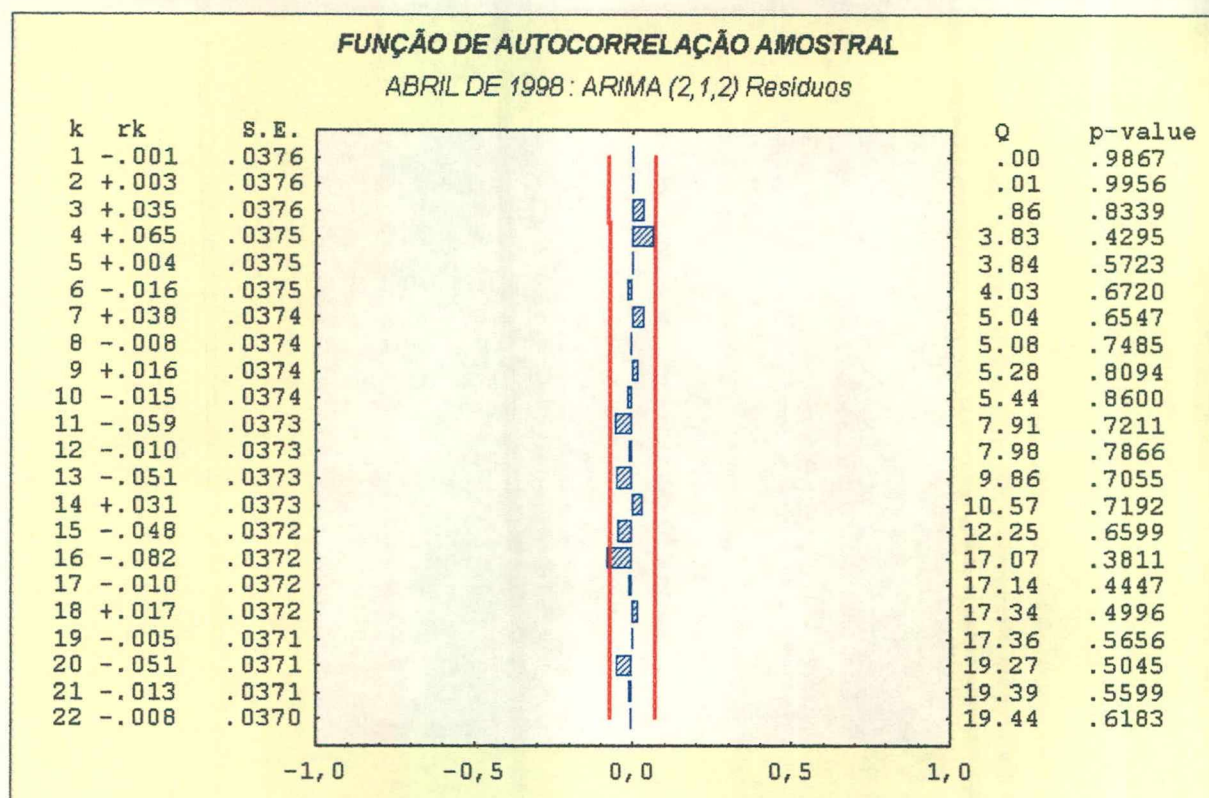
- Abril de 1998

$$\nabla \hat{A}br_t = -0,7158 \nabla \hat{A}br_{t-1} - 0,1018 \nabla \hat{A}br_{t-2} - 0,237 \hat{a}_{t-1} - 0,64 \hat{a}_{t-2}, \quad (5.2.3)$$

Onde:

$\{a_t\}$ : representa uma seqüência de ruído branco com desvio padrão  $\hat{\sigma}_a = 0,0937$ ;

$\nabla \hat{A}br_t$ : representa a característica de interesse projetada para abril de 1998 através do operador  $\nabla$  no instante  $t$ ,  $1 \leq t \leq 705$ .



**FIGURA 11 – FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.3)**

Na figura 11, apresenta-se os resultados da análise dos resíduos, onde a função de autocorrelação amostral e o teste *Portmanteu* com o nível de confiança  $1-\alpha = 95\%$ , onde sustenta-se a perfeita adequação do modelo referente a Abril de 1998.

- Maio de 1998

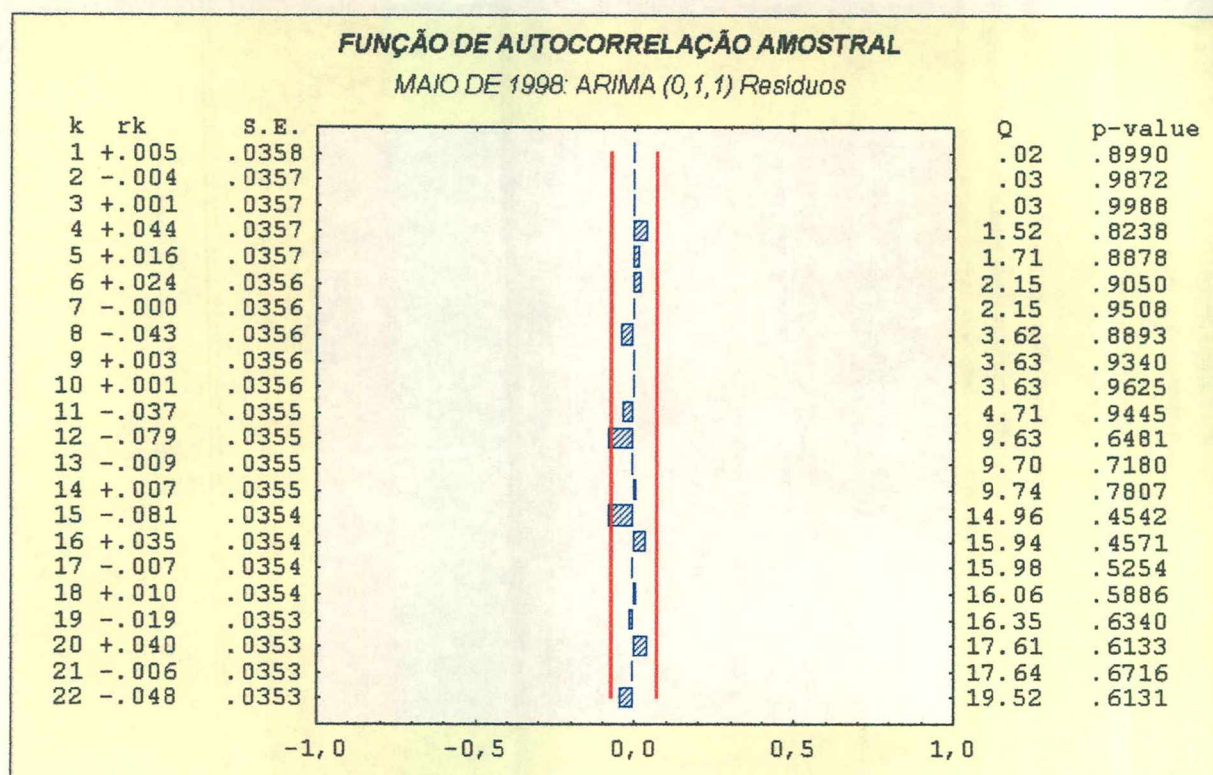
$$\hat{Mai}_t = \hat{Mai}_{t-1} - 0,889\hat{a}_{t-1}, \quad (5.2.4)$$

Onde:

$\{a_t\}$  representa uma sequência de ruído branco com desvio padrão  $\hat{\sigma}_a = 0,0846$ ;

$\hat{Mai}_t$ : representa a característica de interesse projetada para maio de 1998 no instante  $t$ ,  $1 \leq t \leq 780$ .





**FIGURA 12 – FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.4)**

Já a figura 12, mostra os resultados dos resíduos, onde a função de autocorrelação amostral e o teste *Portmanteu* com o nível de confiança  $1-\alpha = 95\%$ , sustentando a perfeita adequação do modelo referente a Maio de 1998.

- Junho de 1998

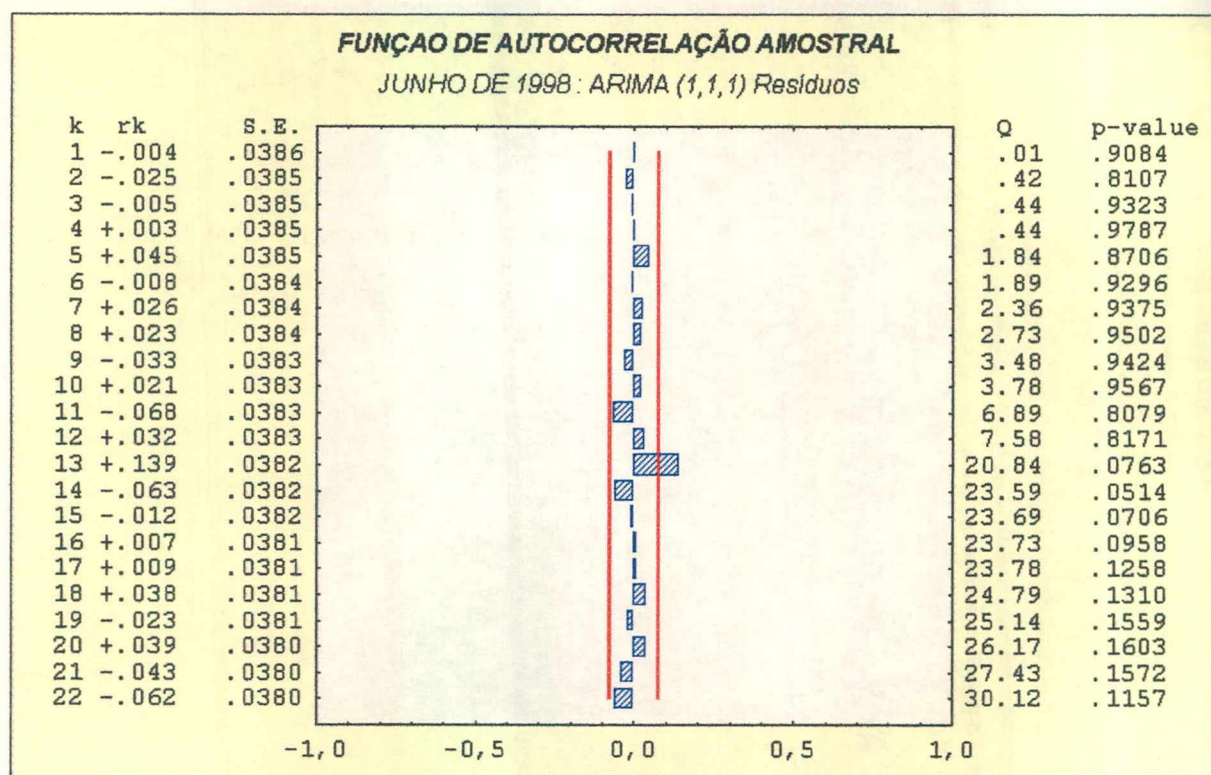
$$\nabla \hat{Jun}_t = -0,186 \nabla \hat{Jun}_{t-1} - 0,9429 \hat{a}_{t-1}, \quad (5.2.5)$$

Onde:

$\{a_t\}$ : representa uma sequência de ruído branco com desvio padrão  $\hat{\sigma}_a = 0,0639$ ;

$\nabla \hat{Jun}_t$ : representa a característica de interesse ajustada para junho de 1998 através do operador  $\nabla$  no instante  $t$ ,  $1 \leq t \leq 670$ .





**FIGURA 13 – FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.5)**

Na figura 13, vê-se os resultados referente aos resíduos, onde a função de autocorrelação amostral e o teste *Portmanteu* com o nível de significância  $\alpha = 5\%$ , sustenta uma perfeita adequação do modelo referente a Junho de 1998.

Finalmente, as figuras 9, 10, 11, 12 e 13, respectivamente, enfatizam que os resíduos provenientes dos modelos previamente estabelecidos, comportam-se como variáveis aleatórias I.I.D. com média zero e variância constante  $\sigma_a^2$ . O valor desta variância é utilizada na construção do gráfico SCC, cuja elaboração é apresentada na seção subsequente.

#### 5.4. ANÁLISE MENSAL DOS GRÁFICOS DE CAUSA ESPECIAL (SCC), CAUSA COMUM (CCC) E INTERVENÇÃO

Nesta seção, busca-se analisar o comportamento mensal do conjunto de dados disponíveis para a característica de qualidade *Descentralização da Roda (mm)*, enfatizando a utilização dos gráficos de causa especial (SCC), e de causa comum (CCC) sugeridos por ALWAN & ROBERTS (1988), MONTGOMERY & FRIENDMAN (1989), WARDELL, MOSKOWITZ & PLANTE (1992), além do procedimento de estimação conjunta sugerido por CHEN & LIU (1993).

##### 5.4.1. Gráfico de Causa Especial (SCC)

O quadro abaixo apresenta a comparação das observações assinaladas como possíveis causas especiais pelo gráfico de observações individuais  $\{X_t\}$ , calculado a partir da estimativa do desvio padrão  $\sigma_o = \bar{R}/d_2$ , pelo gráfico SCC construído a partir da estimativa do desvio padrão do resíduo  $\sigma_R$ , e pelos gráficos EWMA e MOSUM, elaborados a partir da estimativa do desvio padrão  $\sigma_w$  do processo autocorrelacionado.

Quadro 4 – Síntese dos Valores Espúrios Identificados como Prováveis Causas Assinaláveis no Processo para o Período de Fevereiro de 1998 a Junho de 1998 da Variável *Descentralização da Roda (mm)* na Empresa Omega S.A.

Especificação	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Nº de Observações	505	830	705	780	670
Sem Correlação	89, 475, 478	6, 34, 38, 86, 687	119, 192, 517, 521	2, 424, 425, 737	21, 81, 83, 88, 168, 316, 366
Gráfico SCC	30, 89, 479, 478	6, 34, 38, 86, 687	192, 517	5, 424, 737	21, 81, 83, 88, 316, 366, 413
EWMA	—	201 a 205, 207 a 210, 213 a 215	118, 119, 120, 192	2, 3, 4, 41, 45	144, 146
MOSUM	—	202	119, 120, 121	5, 425, 426	—

A análise do quadro acima revela que:

Em Fevereiro de 1998, como a sequência de observações da característica de interesse é descrita pelo modelo IMA(1,1), veja equação (5.2.1). A estimativa do desvio padrão do processo produtivo mensurando o efeito da estrutura de correlação pode ser obtida utilizando a seguinte expressão:

$$\hat{\sigma}_{Fev} = \hat{\sigma}_a \sqrt{(1 + \hat{\theta}_1^2)} = 0,19952 \quad (5.3.1)$$

- O gráfico de observações individuais com os limites posicionado  $\pm 3 \hat{\sigma}_o$  identifica as observações 89, 475 e 478 como prováveis causas assinaláveis;
- O gráfico SCC com os limites em  $\pm 3 \hat{\sigma}_a$ , indica as observações 30, 89, 475 e 478 como prováveis valores espúrios, sugerindo a busca por causas especiais.

- O gráfico EWMA, com constante de suavização  $\lambda = 0,062$ , não identifica pontos fora dos limites de controle, sugerindo que processo produtivo posicionado entre (0,69;0,17) encontra-se em estado de controle estatístico;
- O gráfico MOSUM, com comprimento  $w = 5$ , não identifica pontos localizados fora dos limites de controle;

Como em Março de 1998, a sequência de observações da característica de qualidade continua sendo descrita pelo modelo IMA(1, 1), conforme equação (5.2.2). A estimativa do desvio padrão do processo produtivo pode ser obtida substituindo, na equação (5.3.1), os valores das estimativas referentes a este período.

$$\hat{\sigma}_{Mar} = \hat{\sigma}_a \sqrt{(1 + \hat{\theta}_1^2)} = 0,19166 \quad (5.3.2)$$

- O gráfico de observações individuais com os limites posicionado  $\pm 3 \hat{\sigma}_o$  identifica as observações 6, 34, 38, 86, 687 como prováveis causas especiais;
- O gráfico SCC com os limites em  $\pm 3 \hat{\sigma}_a$ , identifica as mesmas observações localizadas pelo gráfico de controle com estimativa do desvio padrão dado por  $\sigma_o$ ;
- O gráfico EWMA, com constante de suavização  $\lambda = 0,069$ , identifica as observações 201 a 205, 207 a 210, 213 a 215 como valores espúrios, sugerindo a busca por causas especiais;
- O gráfico MOSUM, com comprimento  $w = 5$ , identifica a observação 202 como provável causa assinalável;

Com relação ao mês de Abril de 1998, a sequência de observações da característica de qualidade é descrita pelo modelo ARIMA(2,1,2), apresentado na equação (5.2.3). A estimativa do desvio padrão para o processo produtivo incorporando o efeito da estrutura de correlação dos dados pode ser obtida utilizando a seguinte equação:

$$\hat{\sigma}_{Abr} = \hat{\sigma}_a \sqrt{\frac{1 - \hat{\theta}_1 \psi_1 - \hat{\theta}_2 \psi_2}{1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2}} = 0,11267 \quad (5.3.3)$$

Onde  $\psi_1 = \hat{\phi}_1 - \hat{\theta}_1$  e  $\psi_2 = \hat{\phi}_1 \hat{\theta}_1 + \hat{\phi}_2 - \hat{\theta}_2$

- O gráfico de observações individuais com os limites posicionado  $\pm 3 \hat{\sigma}_o$ , identifica as observações 119, 192, 517, 521 como prováveis causas especiais;
- O gráfico *SCC* com os limites em  $\pm 3 \hat{\sigma}_a$ , identifica as observações 192, 517 como prováveis valores aberrantes sugerindo a busca por causas específicas;
- O gráfico EWMA, com constante de suavização  $\lambda = 0,36$ , identifica os pontos 118, 119, 120 e 192 como causas especiais;
- O gráfico MOSUM, com comprimento  $w = 5$ , identifica os pontos 119, 120, 121 como causas especiais;

No que tange ao mês de Maio de 1998, a sequência de observações da característica de qualidade é representada pelo modelo IMA(1, 1), veja equação (5.2.4). A estimativa do desvio padrão do processo produtivo incorporando o efeito da estrutura de correlação é obtida por:

$$\hat{\sigma}_{Mai} = \hat{\sigma}_a \sqrt{(1 + \hat{\theta}_1^2)} = 0,11328 \quad (5.3.4)$$

- O gráfico de observações individuais com os limites posicionado  $\pm 3 \hat{\sigma}_o$ , identifica as observações 2, 424, 425, 737 como prováveis causas especiais;
- O gráfico *SCC* com os limites em  $\pm 3 \hat{\sigma}_a$ , identifica as observações 5, 424, 737 como prováveis valores aberrantes sugerindo a busca por causas específicas;

- O gráfico EWMA com  $\lambda = 0,11$ , identifica as observações 2, 3, 4, 41 e 51 fora dos limites de controle, sugerindo a busca por causas especiais nos respectivos pontos;
- O gráfico MOSUM, com comprimento  $w = 5$ , identifica as observações 5, 425, 426 como prováveis causas assinaláveis;

Finalmente, em Junho de 1998, a sequência de observações da característica de qualidade é descrita pelo modelo ARIMA(1,1,1), a estimativa do desvio padrão para o processo produtivo mensurando o efeito da correlação existe nos dados é expresso por:

$$\hat{\sigma}_{Jun} = \hat{\sigma}_a \sqrt{\frac{1 + \hat{\theta}_1^2 - 2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}{1 - \hat{\phi}_1^2}} = 0,09753^{17} \quad (5.3.5)$$

- O gráfico de observações individuais com os limites posicionado  $\pm 3\hat{\sigma}_o$ , identifica as observações 21, 81, 83, 88, 168, 316, 366 como prováveis causas especiais;
- O gráfico SCC com os limites em  $\pm 3\hat{\sigma}_a$ , identifica as observações 21, 81, 83, 88, 316, 366, 413 como prováveis causas especiais;
- O gráfico EWMA, com  $\lambda = 0,057$ , mostra as observações 144 e 146 fora dos limites de controle, sugerindo a busca por causas especiais neste pontos;
- O gráfico MOSUM, com comprimento  $w = 5$ , não produz evidências contra a hipótese de que o processo encontra-se em estado de controle estatístico;

---

<sup>17</sup> As derivações das equações (5.3.1), (5.3.2), (5.3.3), (5.3.4) e (5.3.5), respectivamente, encontram-se disponíveis no anexo 3.



#### 5.4.2. Gráfico de Causa Comum (CCC)

A figura 14, apresenta o gráfico de Causa Comum (CCC) para o modelo IMA(1,1),  $\hat{Fev}_t = \hat{Fev}_{t-1} - 0,938\hat{a}_{t-1}$ , permitindo monitorar o nível das causas aleatórias do sistema produtivo e sua provável evolução ao longo de Fevereiro de 1998. Segundo DEMING (1986), as causas comuns são concernentes ao sistema de mudanças naturais que permeiam o processo produtivo, sua eliminação ou redução só pode ser realizada através de ações gerenciais. A figura 14 registra comportamento ascendente no nível de descentralização da roda até a observação 150 sugerindo perda de ajuste da máquina responsável pela operação. A partir da observação 150 até 270 verifica-se comportamento decrescente no nível de descentralização indicando a ocorrência de manutenção preventiva na máquina. Partindo-se da observação 300 até 411 o nível do processo apresenta-se estável em torno do valor 0,60 mm.

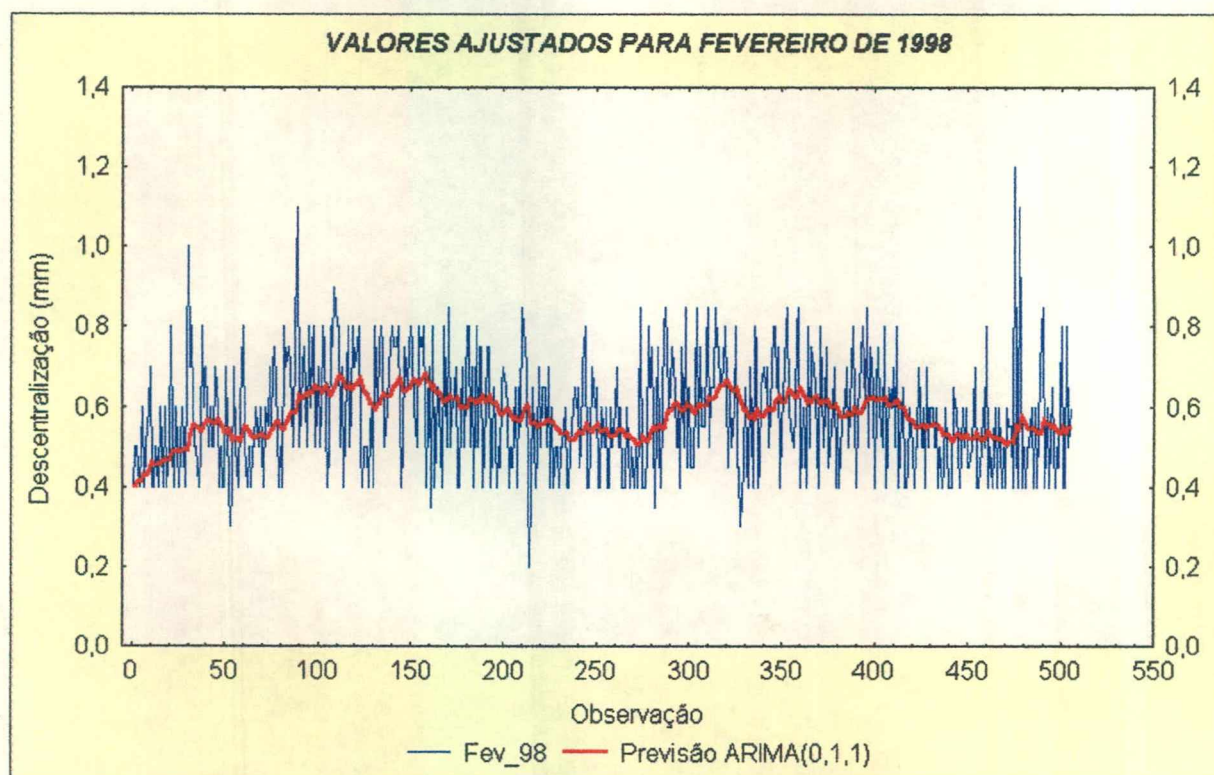
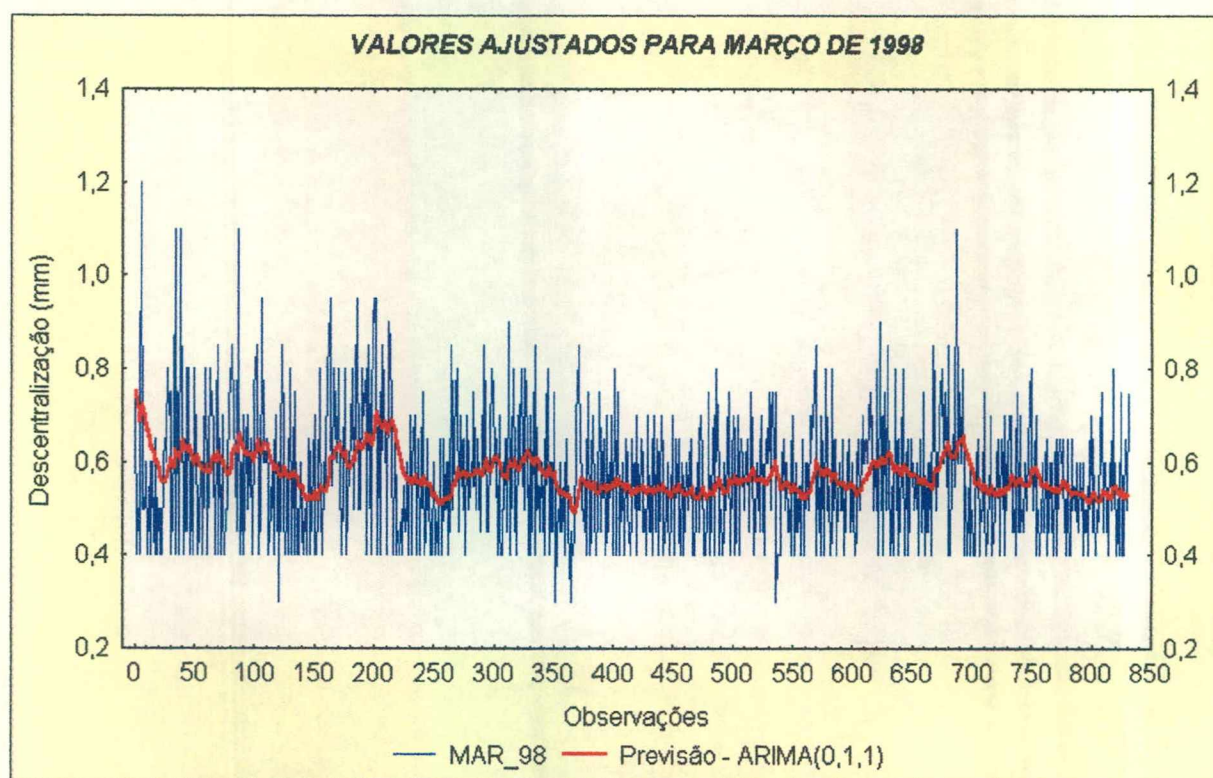


FIGURA 14 – GRÁFICO DE CAUSA COMUM PARA OS VALORES AJUSTADOS PELA EQUAÇÃO (5.2.1)



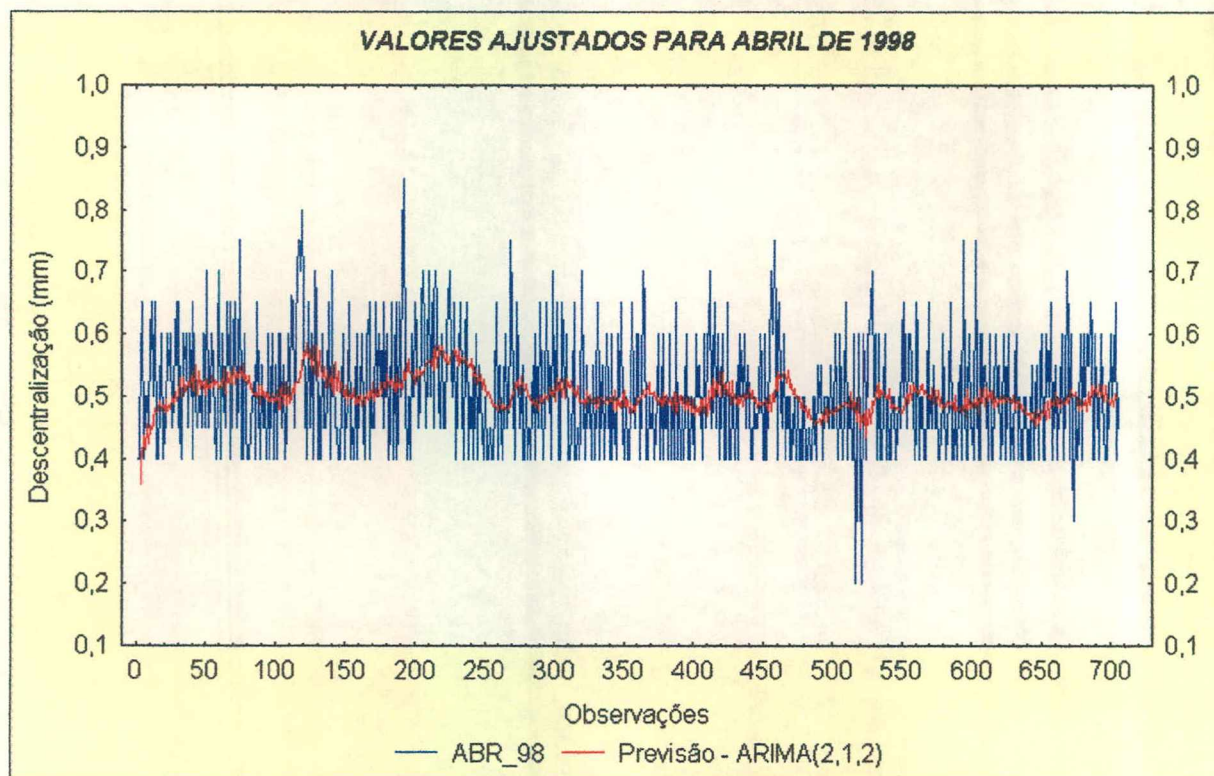
Já a figura 15 apresenta o gráfico de CCC para o modelo IMA(1,1),  $\hat{Mar}_t = \hat{Mar}_{t-1} - 0,931\hat{a}_{t-1}$ ,  $\sigma_a = 0,1403$ , o qual registra um comportamento oscilatório no nível de descentralização da roda dianteira nas primeiras cem observações provavelmente em virtude da liberação da tolerância na máquina, prática comum para satisfazer o ritmo de produção. Visualiza-se que: Da observação 150 até 225 o crescimento no nível de descentralização da roda sugerindo perda de ajuste da máquina responsável pela operação ou variações no insumo do produto. A partir da observação 350 até 550 verifica-se comportamento homogêneo onde as rodas foram fabricas com descentralização média 0,55 mm. Da observação 550 a 700 verifica-se crescimento no nível de descentralização, sugerindo um provável desajuste na máquina ou então, a liberação da tolerância da mesma, visando satisfazer o ritmo de produção.



**FIGURA 15 – GRÁFICO DE CAUSA COMUM PARA OS VALORES AJUSTADOS PELA EQUAÇÃO (5.2.2)**



No que tange a figura 16, observa-se o gráfico CCC para os valores ajustados pelo modelo  $ARIMA(2,1,2)$ ,  $\nabla \hat{Abr}_t = -0,7158 \nabla \hat{Abr}_{t-1} - 0,1018 \nabla \hat{Abr}_{t-2} - 0,237 \hat{a}_{t-1} - 0,64 \hat{a}_{t-2}$ ,  $\sigma_a = 0,0937$ , o qual permite monitorar o nível do processo ajustado e sua provável evolução ao longo de Abril de 1998, constituindo as causas aleatórias do sistema produtivo e, registrando comportamento homogêneo ao longo deste período. Destaca-se, contudo, uma oscilação ocorrida no intervalo 120 a 250 e 400 a 520 sugerindo a perda de ajuste na máquina.

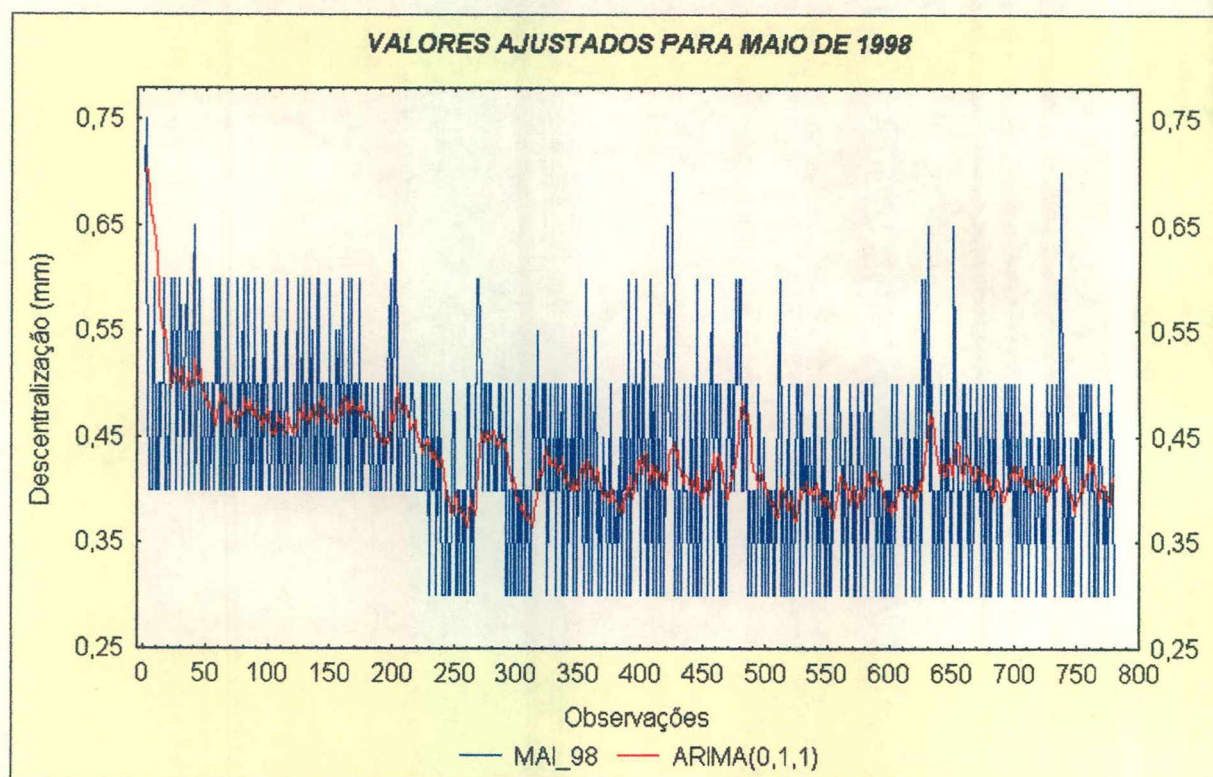


**FIGURA 16 – GRÁFICO DE CAUSA COMUM PARA OS VALORES AJUSTADOS PELA EQUAÇÃO (5.2.3)**

Na análise do mês de maio abaixo, evidenciado através da figura 17, observa-se que a média móvel exponencialmente ponderada EWMA, com  $\lambda=0,111$ , visto através do modelo  $IMA(0,1,1)$ ,  $\hat{Mai}_t = \hat{Mai}_{t-1} - 0,889 \hat{a}_{t-1}$ ,  $\sigma_a = 0,0846$ , permite vislumbrar o nível esperado para o processo produtivo, constituindo uma excelente forma para compreender o funcionamento em tempo real do processo em estudo. Assim, registra-se o comportamento oscilatório com tendência decrescente até a observação 150, a partir desta, nota-se um crescimento acentuado

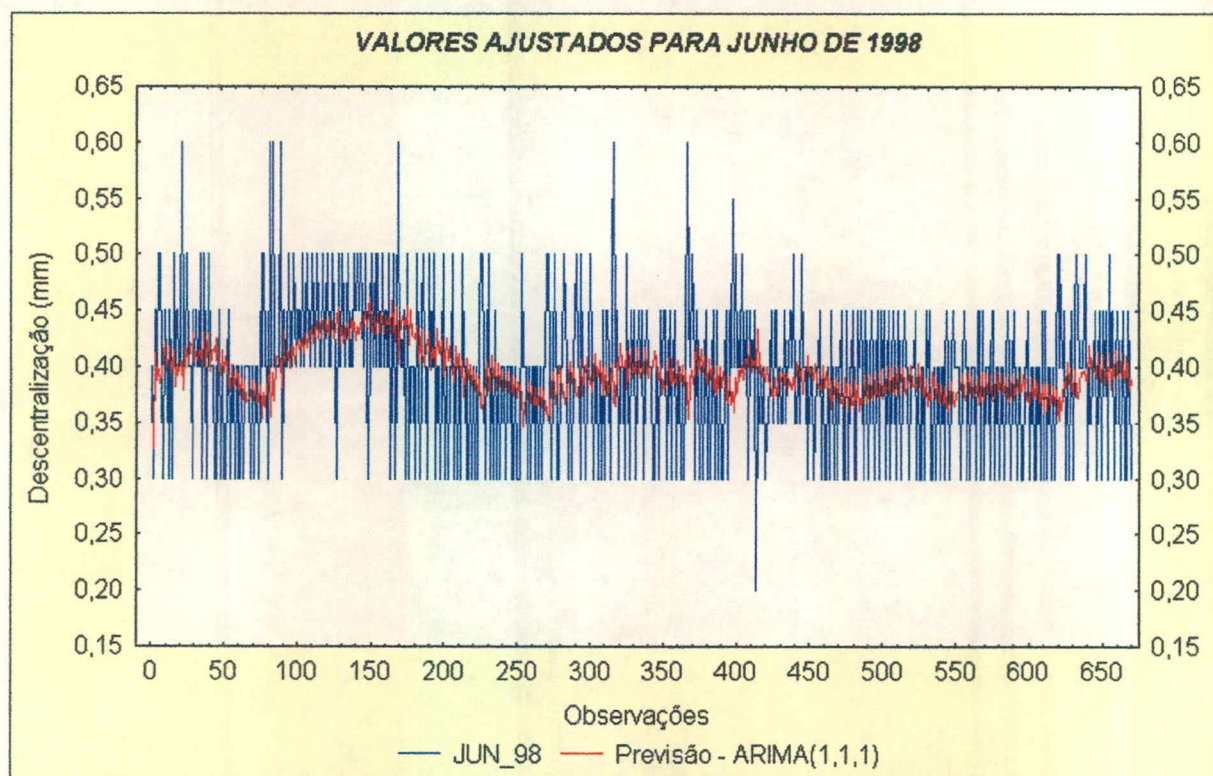


no nível de descentralização da roda refletindo perda de ajuste na máquina. Sanado o problema, o nível de descentralização retorna ao patamar registrado anteriormente. Entre as observações 550 e 700 verifica-se outro crescimento no nível de descentralização da roda sugerindo perda de ajuste na máquina responsável pela operação ou a ocorrência de alteração na fabricação do modelo.



**FIGURA 17 – GRÁFICO DE CAUSA COMUM PARA OS VALORES AJUSTADOS PELA EQUAÇÃO (5.2.4)**

Enfim, a figura 18 apresenta o gráfico dos valores ajustados pelo modelo  $ARIMA(1,1,1)$ ,  $\nabla \hat{Jun}_t = -0,186 \nabla \hat{Jun}_{t-1} - 0,9429 \hat{a}_{t-1}$ ,  $\sigma_a = 0,0639$ , permitindo monitorar o nível do processo ajustado e sua provável evolução ao longo de junho de 1998, constituindo, desta forma, o sistema de causas aleatórias no mês em estudo.



**FIGURA 18 – GRÁFICO DE CAUSA COMUM PARA OS VALORES AJUSTADOS PELA EQUAÇÃO (5.2.5)**

#### 5.4.3. Análise de Intervenção

Nesta subseção, busca-se apresentar os resultados obtidos através da análise de intervenção proposta por CHEN & LIU (1993), associando os diferentes tipos de valores espúrios a problemas da área de qualidade, conforme mencionado por PRASAD & BRAMORSKI (1998) e descrito em detalhes na seção 4.5 do capítulo anterior.



Quadro 5 – Síntese dos Valores Espúrios Identificados pela Análise de Intervenção Sugerida por CHEN & LIU (1993).

Mês	Tipos dos Valores Espúrios	Observações
Fevereiro	LS	—
	AO	30, 89, 475, 478
Março	LS	216, 604, 667, 693
	AO	6, 34, 38, 86, 687
Abril	LS	—
	AO	517
Maio	LS	4, 266
	AO	424, 631, 651, 737
Junho	LS	4, 75, 618
	AO	21, 168, 316, 366

Em Fevereiro de 1998, o procedimento de estimação conjunta sugerido por CHEN & LIU (1993) identificou como prováveis erros de mensuração ou variações na matéria-prima as observações 30, 89, 475 e 478, associando-as a valores espúrios do tipo AO. Caso a empresa confirmasse tais problemas de qualidade como sendo verdadeiramente erros de mensuração do operador, poderia resolvê-los através do treinamento da mão-de-obra almejando melhor manuseio do instrumento de aferição.

Com relação ao período de Março de 1998, o procedimento de estimação conjunta localizou mudança de nível (LS) nas observações 216, 604, 667, 693. Estudos realizados por PRASAD & BRAMORSKI (1998) associam este tipo de valor espúrio a ocorrência de novos procedimentos, novos fornecedores ou mudança na matéria-prima. Em contato com a empresa Omega S.A, verificou-se que, neste mês e próximo aos pontos identificados, ocorreu a inserção de um novo procedimento na linha de montagem, consistindo na lubrificação de uma peça para facilitar o ajuste nos raios da roda pela máquina *MACH ONE*. O procedimento de

estimação conjunta ainda identificou as observações 6, 34, 38, 86, 687 como valores espúrios do tipo AO, associando-os a prováveis erros de mensuração ou variações no perfil do alumínio.

No que tange a Maio de 1998 o procedimento sugerido por CHEN & LIU (1993) localizou mudança de nível nas observações 4 e 266. A empresa Omega S.A confirmou o uso do procedimento de lubrificação para facilitar o aperto dos raios da roda. As observações 424, 631, 651, 737 foram classificadas como valores espúrios do tipo AO. A empresa não possui informações que confirmem a ocorrência de erro de mensuração. Como o processo de manufatura da roda envolve tensões que podem produzir perturbações na dureza do alumínio, recomenda-se um estudo mais detalhado para confirmar tais incidências no processo produtivo.

Enfim, em Junho de 1998 o procedimento de estimação conjunta identificou valores espúrios do tipo AO nas observações 21, 168, 316, 366 e mudança de nível (LS) nas observações 4, 75 e 618. A empresa confirmou, novamente, o uso de lubrificação próximo as observações identificadas como LS pelo procedimento de CHEN & LIU (1993).

## 5.5. REVISÃO DA CARTA DE CONTROLE

Nessa seção, aborda-se dois métodos para expurgar o efeito das causas assinaláveis identificadas através do gráfico SCC , a saber:

- Método 1: consiste na remoção da causa assinalável através da estimativa fornecida pelo modelo  $ARIMA(p, d, q)$  para o respectivo instante  $t_0$ ;
- Método 2: consiste na utilização da análise de intervenção para expurgar o efeito dos valores espúrios identificados na seção 5.3.3

O quadro 6, mostra que após a substituição das causas assinaláveis pelas estimativas do modelo  $ARIMA(p, d, q)$  em cada mês analisado, a estimativa do desvio padrão residual apresenta decréscimo variando de 6,10% em fevereiro de 1998 a 2,83% em abril de 1998. Esse quadro apresenta, também, os valores da redução ocorrida na estimativa do desvio padrão residual quando se utiliza a análise de intervenção para modelar a estrutura dinâmica das causas especiais.

Quadro 6 – Comparação da Estimativa do Desvio Padrão Residual Antes e Depois de Eliminar os Efeitos das Causas Assinaláveis.

Mês	Modelo	$\hat{\sigma}_a$	Método 1		Método 2	
			$\hat{\sigma}_a^{'novo}$	$\hat{\sigma}_a^{novo} / \hat{\sigma}_a$	$\hat{\sigma}_a^{'novo}$	$\hat{\sigma}_a^{novo} / \hat{\sigma}_a$
Fevereiro-98	ARIMA(0,1,1)	0,1459	0,1370	-6,100	0,1371	-6,031
Março-98	ARIMA(0,1,1)	0,1403	0,1341	-4,419	0,1354	-3,493
Abril-98	ARIMA(2,1,2)	0,0937	0,0911	-2,829	0,0925	-1,281
Mai-98	ARIMA(0,1,1)	0,0846	0,0819	-3,191	0,0813	-3,901
Junho-98	ARIMA(1,1,1)	0,0639	0,0607	-5,202	0,0609	-4,695

Recalculando as estimativas de máxima verossimilhança (ML) para os parâmetros das equações (5.2.1) a (5.2.5) e refazendo o gráfico *SCC*, descritos na subseção 5.3.1, para cada mês analisados, não ocorreram evidências, ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ , contra a hipótese nula  $H_0$  de que o processo encontra-se em estado de controle estatístico, constituindo, assim, um sistema de variação de causa comum.

Contudo, LUCAS (1994) lembra que o sistema de causa comum contém desvios que apesar de não ser economicamente viável removê-los, podem ter seus efeitos compensados.

Desta forma, sugere o uso da equação  $\left(1 - \frac{\sigma_a^2}{\sigma_w^2}\right)$  denominada de fração da variabilidade do sistema de causa comum (FVCC) para melhor avaliar a importância da variabilidade decorrente do sistema de causa comum frente a variabilidade total do sistema produtivo.

Quadro 7 – Percentual de Participação da Variabilidade do Sistema de Causa Comum Frente a Variabilidade Total do Sistema Produtivo.

Mês	Modelo	$\hat{\sigma}_w$	$\hat{\sigma}_a$	$1 - \frac{\hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_w^2}$
Fevereiro-98	ARIMA(0,1,1)	0,1871	0,1370	46,38 %
Março-98	ARIMA(0,1,1)	0,1825	0,1341	46,00 %
Abril-98	ARIMA(2,1,2)	0,1000	0,0910	17,19 %
Maió-98	ARIMA(0,1,1)	0,1097	0,0817	44,53 %
Junho-98	ARIMA(1,1,1)	0,0893	0,0607	53,79 %

O quadro 7 demonstra que a fração de variabilidade do sistema de causa comum apresenta um elevado grau de participação dentro de cada período analisado, sugerindo a utilização de ferramentas de controle automático do processo (APC) para compensar o efeito da variação intrínseco existente no processo produtivo. BOX & LUCENO (1997) argumentam que independente do percentual de participação sob a variabilidade total do processo, o sistema de causa comum deve sempre ser compensado em virtude de esconder possíveis tendências decorrentes de causas específicas.

Desta forma, na seção subsequente, discute-se o emprego de uma ferramenta de controle automático do processo (APC) denominada de gráfico de ajuste limitado ou abreviadamente BAC – *Bounded Adjustment Chart*. A priori este gráfico será utilizado para indicar a necessidade de ajustes, no sistema em perfeito estado de controle estatístico, através de uma variável de controle do processo e, a posteriori no monitoramento, através da estatística de Fisher,  $Q_S$ , da sequência de desvios residuais decorrentes de tais regulagens.

## 5.6. CONTROLE ATIVO DO PROCESSO

Nesta seção, a série temporal livre da influência das causas assinaláveis será utilizada na construção do gráfico de ajuste limitado (*BAC*). A utilização do gráfico *BAC* permite um controle ativo sobre o processo produtivo, indicando a quantidade de ajustes necessários para manter o sistema sob determinado nível estabelecido pela área técnica. A busca por anomalias após a realização dos ajustes no processo é realizada através do monitoramento da série  $\{e_t\}$ , utilizando a estatística de *Fisher*,  $Q_s$ , sugerido por BOX & LUCENO (1997). A seguir apresenta-se a análise mensal para o sistema combinado APC/CEP.

- Fevereiro de 1998

Admite-se a existência, em Fevereiro de 1998, de um sistema de ajuste responsivo e que a série livre da presença de valores espúrios seja adequadamente representada pelo modelo IMA(1, 1) com as seguintes estimativas  $\hat{\theta}_1 = 0,9303$  e  $\hat{\sigma}_a = 0,1370$ . Desta forma, os resultados de BOX et. al. (1974) podem ser empregados para calcular os intervalos de ajustes (AAI) e o percentual de incremento (ISD) sob a variância da série  $\{e_t\}$ .

O quadro 8 apresenta os valores dos índices AAI e ISD para vários valores de  $L/\sigma_a$ . Se a empresa não executar nenhum ajuste, ou seja, não alterar o nível de tolerância na máquina *MACH ONE*, o incremento sobre o esquema de mínima variância (MMSE) é de 5,264% para manter o nível do processo em torno 0,57 mm e 89,69 % para posicionar o nível médio de descentralização do processo próximo ao valor 0,45 mm.



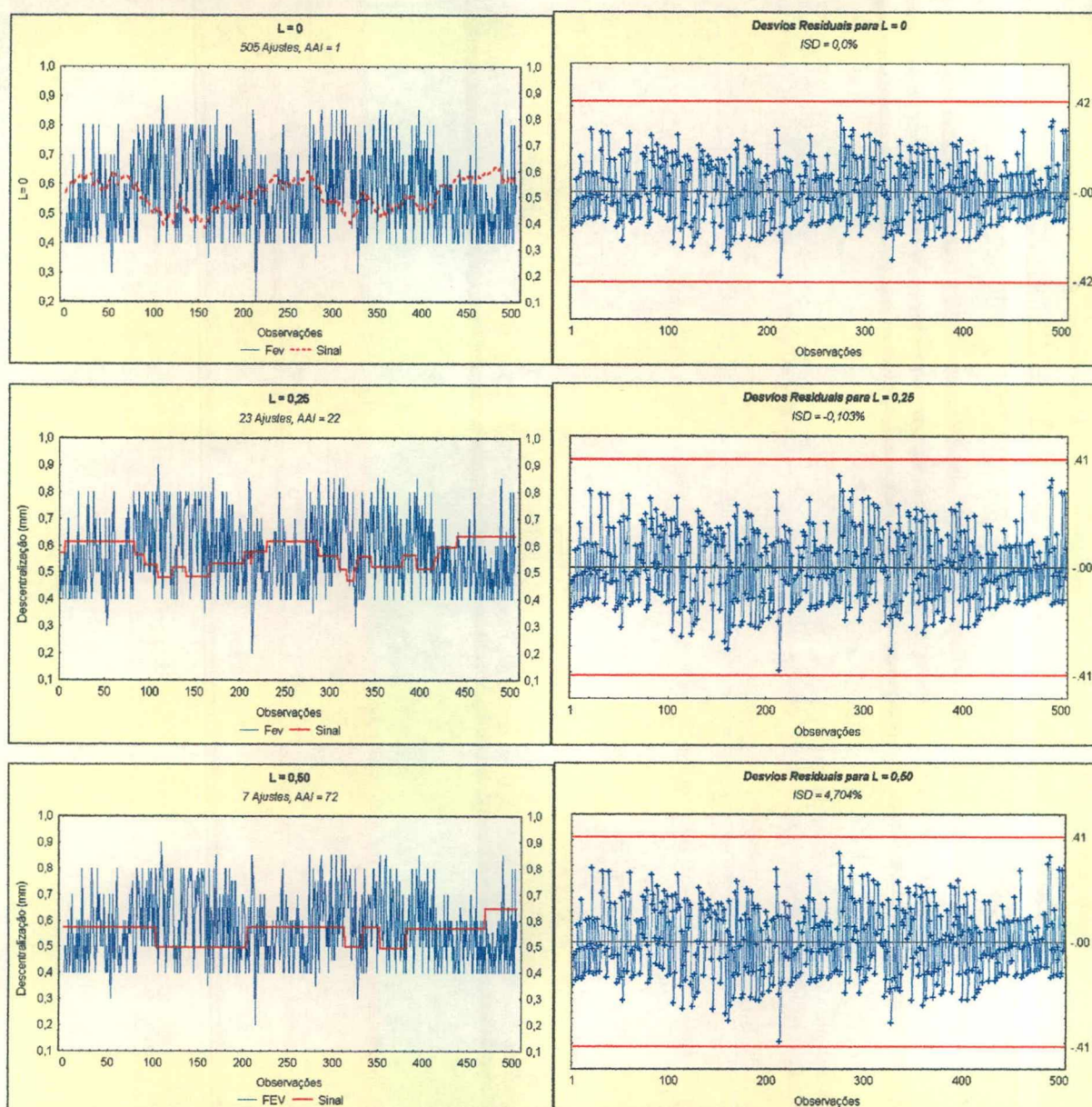
Quadro 8 – Intervalo Médio de Ajuste (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo para os Dados Coletados em Fevereiro de 1998 na Empresa Omega S.A

Mês	Valor Desejado $T_0$ (mm)	(a) $L/\hat{\sigma}_a$	Quantidade de ajustes	AAI	ISD (%)
Fevereiro	0,57	0	505	1	0
		0,25	23	22	-0,103
		0,5	7	72	4,704
		0,75	2	252	7,326
		1,00	0	—	5,264
	0,45	0	505	1	0
		0,25	23	22	0,320
		0,5	7	72	3,736
		0,75	5	101	13,722
		1,00	1	505	11,174
		1,25	1	505	23,206
		1,5	1	505	53,734
		1,75	0	—	89,691

(a) Este termo representa o percentual de influência do desvio padrão calculado a partir da soma de quadrado da série ajustada

Fazendo uma breve análise sobre as observações concernentes ao mês de fevereiro de 1998, ilustrado a partir da figura 19<sup>18</sup>, observa-se estas ilustram a série da característica de qualidade *Descentralização da Roda (mm)* livre da presença de causas especiais, juntamente com o sinal extraído do sistema produtivo através da regulação da variável de controle Tolerância na Máquina *MACH ONE* com  $L/\hat{\sigma}_a = 0; 0,25$  e  $0,50$ .

<sup>18</sup> Vale lembrar que os gráficos relativos aos meses subsequentes encontram-se disponíveis no anexo 1.



**FIGURA 19 – GRÁFICOS CONJUNTOS DA SÉRIE NÃO COMPENSADA COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0$ ; 0,25 e 0,50. OS GRÁFICOS DO LADO DIREITO MOSTRAM OS DESVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_s$ .**

A figura 19 mostra os desvios residuais provenientes da série *Descentralização da Roda (mm)* compensada para fevereiro de 1998, com  $G = 1 - \hat{\theta} = 0,07$  e o ganho  $g = \hat{\theta} = 0,93$ , fornece os ajustes necessários ao sistema através da expressão  $x_t = (-0,075)e_t$ <sup>19</sup>. Vale lembrar que o valor de  $\hat{\theta}$  é proveniente do modelo IMA(1, 1).

A suposição de que a série  $\{e_t\}$  constitui um ruído branco é satisfeita para cada valor de  $L/\hat{\sigma}_a$  descritos no quadro 8. O monitoramento da série  $\{e_t\}$  realizado através da estatística  $Q_s$  com os limites de controle posicionados em  $\pm 3\hat{\sigma}_a$ , revela a inexistência de causas especiais para os ajustes obtidos com  $L/\hat{\sigma}_a = 0, 0,25$  e  $0,50$ . Cabe ressaltar que os limites de controle do gráfico BAC são usualmente estabelecidos sob o julgamento de engenharia considerando custos de controle e de ajuste.

- Março de 1998

Admite-se a existência, em Março de 1998, de um sistema de ajustes responsivo e que a série livre da presença de valores espúrios seja adequadamente representada pelo modelo IMA(1, 1) com as seguintes estimativas  $\hat{\theta}_1 = 0,923$  e  $\hat{\sigma}_a = 0,1341$ . Assim, os resultados de BOX et. al. (1974) podem ser utilizados para obter o intervalo médio de ajuste (AAI) e o percentual de incremento (ISD) na variância da série  $\{e_t\}$ .

O quadro 9 apresenta os resultados dos índices AAI e ISD para vários valores de  $L/\sigma_a$ . Se a empresa adotar a política de não realizar ajustes, isto é, não alterar o nível de tolerância  $\{x_t\}$  existente na máquina *MACH ONE*, o incremento sobre o esquema de mínima variância (MMSE) é de 0,011% para manter o nível do processo em torno 0,57 mm. Caso a empresa resolvesse alterar o valor desejado ( $T_o$ ) de 0,57 para 0,45, sem realizar ajuste na máquina *MACH ONE*, a variabilidade sob o novo nível do processo sofreria um incremento de 75,69%.

---

<sup>19</sup> Vale lembrar que os ajustes  $\{x_t\}$  são obtidos pela equação fundamental para controles PI descrita na página 59 como sendo  $x_t = \frac{-G}{g} e_t$ .

Quadro 9 – Intervalo Médio de Ajuste (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo para os Dados Coletados em Março de 1998 na Empresa Omega S.A

Mês	Valor Desejado $T_0$ (mm)	$L/\hat{\sigma}_a$	Quantidade de Ajustes	AAI	ISD (%)
Março	0,566	0	830	1	0
		0,25	44	19	-0,296
		0,5	12	69	1,661
		0,75	2	415	1,029
		1,00	2	415	3,11
		1,25	0	—	0,011
	0,45	0	830	1	0
		0,25	45	18	-0,308
		0,5	17	49	5,325
		0,75	3	277	1,409
		1,00	1	830	5,371
		1,25	1	830	28,762
		1,5	1	830	60,202
		1,75	1	830	106,704
		2,00	0	—	75,691

A análise dos desvios residuais provenientes da série *Descentralização da Roda (mm)* compensada com  $G = 1 - \hat{\theta} = 0,08$  e ganho  $g = \hat{\theta} = 0,92$  permite a obtenção da sequência de ajustes através da expressão  $x_t = (-0,087)e_t$ . A suposição de que a série  $\{e_t\}$  constitui um ruído branco é satisfeita para cada valor de  $L/\hat{\sigma}_a$  descritos no quadro 9. O monitoramento da série  $\{e_t\}$  realizado através da estatística  $Q_s$  com os limites de controle posicionados em  $\pm 3\hat{\sigma}_a$ , revela, para nível de significância  $\alpha = 1\%$ , inexistência de causas especiais para os ajustes obtidos com  $L/\hat{\sigma}_a = 0, 0,25$  e  $0,50$ .

- Abril de 1998

Admite-se a existência, em Abril de 1998, de um sistema de ajustes responsivo e que a série livre da presença de valores espúrios seja adequadamente representada pelo modelo ARIMA(2,1,2), cujas estimativas para os parâmetros são:  $\hat{\phi}_1 = -0,7822$ ,  $\hat{\phi}_2 = -0,1131$ ,  $\hat{\theta}_1 = 0,1952$ ,  $\hat{\theta}_2 = 0,6723$  e  $\hat{\sigma}_a = 0,0910$ .

O gráfico de ajuste limitado (BAC) fornece ajustes ótimos no esquema de mínima variância somente quando a suposição de que a sequência  $\{y'_t\}$  seja representada pelo modelo de série temporal IMA(1, 1) for contemplada. Como, neste período, tal suposição não é satisfeita, utiliza-se, então, o procedimento alternativo proposto por LUCENO (1995) para calcular a estimativa de máxima verossimilhança da constante de suavização do gráfico BAC.

Quadro 10 – Intervalo Médio de Ajuste (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo para os Dados Coletados em Abril de 1998 na Empresa Omega S.A

Mês	Valor Desejado $T_0$ (mm)	$L/\sigma_a$	Quantidade de Ajustes	AAI	ISD (%)
Abril	0,57	0	705	1	0
		0,25	22	32	-0,050
		0,5	4	176	3,667
		0,75	1	705	28,876
		1,00	0	—	49,570
	0,45	0	705	1	0
		0,25	23	31	0,825
		0,5	5	141	1,602
		0,75	1	705	34,339
		1,00	0	—	35,296

A análise dos desvios residuais provenientes do procedimento alternativo para a série *Descentralização da Roda (mm)* compensada para  $G = 1 - \hat{\theta} = 0,06$  e ganho  $g = \hat{\theta} = 0,94$ , possibilitando construir a sequência de ajustes através da equação  $x_t = (-0,064)e_t$ . A suposição de que a série  $\{e_t\}$  constitui um ruído branco é satisfeita para cada valor de  $L/\hat{\sigma}_a$  descritos no quadro 10. O monitoramento da série  $\{e_t\}$  realizado através da estatística  $Q_s$  com os limites de controle posicionados em  $\pm 3\hat{\sigma}_a$ , revela, para o nível de significância  $\alpha = 1\%$ , inexistência de causas especiais nos ajustes obtidos com  $L/\hat{\sigma}_a = 0, 0,25$  e  $0,50$ .

- Maio de 1998

Admite-se a existência, em Maio-98, de um sistema de ajustes responsivo e que a série livre da presença de valores espúrios, seja adequadamente representada pelo modelo IMA(1,1) cujas estimativas são:  $\hat{\theta}_1 = 0,8955$  e  $\hat{\sigma}_a = 0,0817$ . Desta forma, os resultados de BOX et. al. (1974) podem ser utilizados para calcular o intervalo de ajuste (AAI) e o percentual de incremento sob a variância da série  $\{e_t\}$ . O quadro 11 apresenta os valores dos índices AAI e ISD para várias alternativas de  $L/\hat{\sigma}_a$ . Se a empresa não executar nenhum ajuste, ou seja, não alterar o nível de tolerância na máquina *MACH ONE*, o incremento sobre o esquema MMSE seria de 8,40% para manter o nível do processo em torno 0,43 mm, posicionando a estimativa do desvio padrão do erro residual em 0,0886 mm.

Quadro 11 – Intervalo Médio de Ajuste (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo para os Dados Coletados em Maio de 1998 na Empresa Omega S.A

Mês	Valor Desejado $T_0$ (mm)	$L/\hat{\sigma}_a$	Quantidade de Ajustes	AAI	ISD (%)
Maio	0,43	0	780	1	0
		0,25	71	11	-0,880
		0,5	20	39	2,686
		0,75	11	71	1,493
		1,00	2	390	14,914
		1,25	2	390	19,194
		1,5	0	—	8,398
	0,45	0	780	1	0
		0,25	68	12	-1,027
		0,5	17	46	1,141
		0,75	9	87	3,828
		1,00	7	111	16,553
		1,25	0	—	16,074

A análise dos desvios residuais provenientes da série *Descentralização da Roda (mm)* compensada para  $G = 1 - \hat{\theta} = 0,11$  e ganho  $g = \hat{\theta} = 0,89$ , permite descrever a sequência de ajustes necessários ao sistema através da expressão  $x_t = (-0,12)e_t$ . A suposição de que a série  $\{e_t\}$  constitui um ruído branco é satisfeita para cada valor de  $L/\hat{\sigma}_a$  descritos no quadro 11. O monitoramento da série  $\{e_t\}$  realizado através da estatística  $Q_s$  com os limites de controle posicionados em  $\pm 3\hat{\sigma}_a$ , revela a existência de uma possível causa especial nos ajustes realizados para  $L/\hat{\sigma}_a = 0, 0,25$  e  $0,50$ .

- Junho de 1998

Finalmente, Admite-se a existência, em Junho de 1998, de um sistema de ajustes responsivo e que a série livre da presença de valores espúrios seja adequadamente representada pelo modelo ARIMA(1, 1, 1) cujas estimativas são:  $\hat{\phi}_1 = -0,1977$ ,  $\hat{\theta}_1 = 0,9393$  e  $\hat{\sigma}_a = 0,0607$ .

O gráfico de ajuste limitado (BAC) fornece ajuste ótimos no esquema de mínima variância somente quando a suposição de que o distúrbio é representado pelo modelo de série temporal IMA(1, 1) for contemplada. Como, em junho, o distúrbio é representado pelo modelo ARIMA(1, 1, 1), utiliza-se o procedimento alternativo proposto por LUCENO (1995) para calcular a estimativa de máximo verossimilhança da constante de suavização do gráfico BAC admitindo o modelo IMA.

O quadro 12 apresenta os resultados dos índices AAI e ISD para vários valores de  $L/\hat{\sigma}_a$ . Se a empresa não executar nenhum ajuste na tolerância na máquina *MACH ONE*, o incremento sobre o esquema MMSE é, em Junho de 1998, de 2,54% para manter o nível do processo em torno 0,39 mm, posicionando a estimativa do desvio padrão do erro residual em 0,0622 mm.



Quadro 12 – Intervalo Médio de Ajuste (AAI) e o Percentual de Crescimento do Desvio Padrão (ISD) em Relação a Dois Valores Especificados para o Nível do Processo para os Dados Coletados em Junho de 1998 na Empresa Omega S.A

Mês	Valor Desejado $T_0$ (mm)	$L/\hat{\sigma}_a$	Quantidade de Ajustes	AAI	ISD (%)
Junho	0,39	0	670	1	0
		0,25	22	31	0,584
		0,5	2	335	-1,255
		0,75	2	335	4,785
		1,00	0	-	2,538
	0,45	0	670	1	0
		0,25	23	29	0,494
		0,5	4	168	1,328
		0,75	1	670	6,063
		1,00	1	670	12,033
		1,25	1	670	30,579
		1.5	0	-	86,014

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

O objetivo deste trabalho foi desenvolver de forma prática e didática um modelo de monitoramento e ajuste simultâneo partindo da metodologia sugerida por ALWAN & ROBERTS (1988) para dados autocorrelacionados em aplicações de controle de qualidade e juntamente com a teoria de controle estocástico disponível para os controles integrais PI.

Partindo de cartas de controle reais cedidas pela empresa Omega S.A, foram construídos vários gráficos de controle revisados e posteriormente aplicados em cada gráfico BAC, com o objetivo de compensar a variabilidade do sistema de causa comum e monitorar os desvios residuais  $\{e_t\}$ , através da estatística cuscore  $Q_s$ , para identificar rapidamente anomalias no sistema de causa comum.

A metodologia testada mostrou-se satisfatória do ponto de vista estatístico e operacional. Ao flexibilizar a hipótese de independência nos dados gerou-se uma nova perspectiva de aprendizagem sobre o processo produtivo através das informações contidas na estrutura de autocorrelação dos modelos ARIMA, as quais eram ignoradas pelo modelo clássico de monitoramento. Isto permitiu o crescimento do volume de informações técnicas para a correta tomada de decisão. Por exemplo, a utilização da análise de intervenção proposta por CHEN & LIU (1993), a qual permite classificar os valores espúrios em quatro classe distintas IO, AO, TC e LS e associando-os a determinados conjuntos de causas específicas e fornecendo uma visão ao decisor do que de fato está ocorrendo no chão da fábrica, antes da verificação *in loco*. No modelo de monitoramento clássico não existe esta informação, ao identificar uma provável causa especial o operador deve buscar uma causa específica para este valor.

Com relação ao gráfico BAC utilizado para indicar a necessidade de ajuste no sistema, observou-se que este é de fácil utilização e fornece valores ótimos para o esquema de mínima variância quando a série de observações da característica de qualidade é representada adequadamente pelo modelo de média móvel integrada – IMA. Caso o modelo não seja um IMA, pode-se utilizar o procedimento alternativo proposto por LUCENO (1995) para calcular a constante de não estacionaridade ( $\lambda$ ) a ser utilizada no gráfico BAC. Neste estudo, o valor da constante de suavização foi posicionado em  $G = 1 - \theta$  e o ganho do sistema em  $g = \theta$ , estudos posteriores poderiam utilizar um ganho cujo valor fosse mais realístico ao inferir o

comportamento induzido pela variável de manipulação na característica de qualidade em estudo.

O controle eficiente do processo constitui o ponto fundamental na manutenção e melhoria da qualidade e produtividade. Neste trabalho, sustenta-se que o controle estatístico do processo (CEP) e o controle estocástico (APC) podem ser utilizados conjuntamente para mensurar a característica de interesse da melhor forma possível, visando usufruir ganhos na busca pela melhoria contínua da qualidade. Almeja-se através do uso combinado APC/CEP explorar ambos conceitos da teoria de controle e do monitoramento estatístico e, não apenas empregar um ou outro método como ocorre freqüentemente nas aplicações industriais. Desta forma, o trabalho apresentado não esgota o assunto e algumas recomendações podem ser realizadas:

A primeira delas é a de que seja feito um estudo de simulação para avaliar o desempenho dos gráficos Shewhart, MOSUM, EWMA, CUSUM e SCC quando a estimativa do desvio padrão do processo for obtida através do modelo  $ARIMA(p, d, q)$ , com o intuito de identificar o gráfico que possui a melhor região de dominância; Posteriormente, deve-se inserir uma análise de custo, incorporando o custo de ajuste ( $C_A$ ), o custo de estar fora do valor desejado ( $C_T$ ) e o custo de amostragem ( $C_S$ ), possibilitando a comparação entre vários esquemas de ajustes.

Ademais, deve-se ainda realizar a automação das planilhas de cálculo e gerar os gráficos a fim de almejar maior agilidade do processo, permitindo diminuir o tempo entre a coleta de dados e a geração dos gráficos de controle. Com relação a metodologia proposta é fundamental que esta seja discutida e devendo ser ainda avaliada a determinação dos valores para a constante de suavização  $G$  e ganho do sistema  $g$  utilizadas na equação fundamental de ajuste, o que fornece a oportunidade para que as pessoas envolvidas diretamente no processo sejam ouvidas, com o intuito de que possíveis incorreções sejam observadas, permitindo que o modelo matemático desenvolvido para o sistema combinado APC/CEP possa realmente alcançar a melhoria contínua do processo.

Finalmente, a metodologia proposta não garante por si só o sucesso pretendido, exigindo um apoio gerencial para que alterações de procedimentos sejam implementadas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALWAN, L.C & ROBERTS, H. V. "Times series modeling for statistical process control".  
*Journal of Business. Economics . Statistics.*, v.16, pp. 83-89. 1988

---

"The problem of misplaced control limits". *Applied Statistics.*, v. 44, nº 3, pp. 269-278, 1995.

BARNARD, G. A. "Control charts and stochastic process, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 21, pp. 239-271, 1959.

BAXLEY, R. V. "A discussion on exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements". LUCAS, J. M. & SACCUCCI, M. S. *Technometrics*, v.32, nº 1, 13- 16, 1990.

BOX, G. E. P;& JENKINS G. M. "Times series analysis: forecasting and control", Holden – Day, San Francisco, 1976.

---

"Further contributions to adaptative quality control: simultaneous estimation of dynamics: non-zero costs. *ISI Bulletin*, 34<sup>th</sup> Session, Ottawa, Canada, pp. 943-974, 1963.

BOX, G. E. P; JENKINS G. M. & MACGREGOR, J. F. "Some recents advances in forecasting and control", *Applied. Statistics*, v. 23, nº 2, pp. 158-179, 1974.

BOX, G. E. P; JENKINS G. M. & REINSEL, G. C. "Times series analysis: forecasting and control", New Jersey, Prentice – Hall, 1994.

BOX, G. E. P., & KRAMER, T. "Statistical process monitoring and feedback adjustment. A discussion. *Technometrics*, v. 34, n 3, pp.251-285, 1992.

- BOX, G. E. P & LUCENO, A. "Statistical control by monitoring and feedback adjustment", New York, Wiley Series in Probability and Statistics, 1997.
- BOX, G. E. P. & PIERCE, D. A. "Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models", *JASA*, v. 65, n° 332, pp. 1509-1526, 1970.
- BOX, G. E. P. & TIAO, G. C. "Intervention analysis with applications to economic and environmental problems", *JASA*, v. 70, n° 349, pp. 70-79, 1975.
- CHANG, I.; TIAO, G. C. & CHUNG, C. "Estimation of times series parameters in presence of outliers". *Technometrics*, v. 30, n° 2, 193-204, 1988.
- CHUNG, C & LIU, L. "Joint estimation of model parameters and outlier effects in times series", *JASA*, v. 88, n° 421, pp. 284-297, 1993.
- CROWDER, S. V. "A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts". *Technometrics*, v. 29, n°4, 401- 407, 1987.
- DEMING, W. E. "Out of the crisis", Massachusetts Institute of Technology, Center of Advanced Engineering Studies, Cambridge, MA, 1986.
- ENGLISH, J. R., KRISNAMURTHI, M. & SASTRI, T. "Quality monitoring of continuous flow processes", *Computers and Industrial Engineering*, v. 20, pp. 251-260, 1991.
- FOX, A. J. "Outliers in times series". *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, v. 34, 350-362, 1972.
- GAN, F. F. "Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts". *Technometrics*, v. 37, n°4, 446-453, 1995.

- GLASBEY, C. A. "A generalization of partial autocorrelations useful in identifying ARMA models", *Technometrics*, v. 24, n° 3, pp.223-228, 1982.
- HAHN, G. & R. HOERL. "Key challenges for statisticians in business and industry" *Technometrics*, v. 40, n° 3, pp. 192-213 (with discussion), 1998.
- HARRIS, T. J. & ROSS, W. H. "Statistical process control procedures for correlated observations". *Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 69, 48-57, 1991.
- HASLETT, J. & HAYES, K. "Residuals for linear model with general covariance structure", *Journal of Royal Statistical Society*, v. 60, pp. 201-215, 1998.
- HAWKINS, D. "A CUSUM for a scale parameter", *Journal of Quality Technology*, v. 13, n° 4, pp. 228-231, 1981.
- HUNTER, J. S. "The exponentially weighted moving average. *Journal of Quality Technology*, v. 18, pp. 203-210, 1986.
- JACKSON, J. E. "Quality control methods". *Industrial Quality Control*, January 4-8, 1956.
- JOHNSON, R. A. & BAGSHAW, M. "The effect of serial correlation on the performance of Cusum tests, *Technometrics*, v.16, pp. 103-112, 1974.
- LAI, T. L. "Control charts based on weighted sums", *Annals of Statistics*, v. 2, n° 1, pp.134-147, 1974.
- LJUNG, G. M. "On outliers detection in times series". *Journal of Royal Statistical Society*, v.55, n°2, 559-567, 1993.
- LJUNG, G. M. & BOX, G. E. P. "The likelihood function of stationary autoregressive – moving average models. *Biometrika*, v. 66, pp. 265-270, 1979.

LUCAS, J. M. "A modified V- mask control scheme", *Technometrics*, v. 15, n° 4, pp. 833-847, 1973.

\_\_\_\_\_ "Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes", *Journal of Quality Technology*, v. 14, n° 2, pp. 51-59, 1982.

LUCAS, J. M. & SACCUCCI, M. S. "Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements". *Technometrics*, v.32, n° 1, 1- 29, 1990.

LUCENO, A. "Performance of discrete feedback adjustment schemes with dead band, under stationary versus nonstationary stochastic disturbance", *Technometrics*, v. 40, n° 3, pp. 223-233, 1998.

\_\_\_\_\_ "Detecting possibly non-consecutive outliers in industrial time series". *Journal of Royal Statistical Society*, v.60, n° 2, 295-310, 1998.

\_\_\_\_\_ "Choosing the EWMA parameter in engineering process control", *Journal of Quality Technology*, v. 27, pp.162-168, 1995.

MACGREGOR, J. F. "A discussion on Statistical process monitoring and feedback adjustment, Box & Kramer (eds.), *Technometrics*, v. 40, n° 3, pp. 273-275, 1992.

MCCLAIN, J. O. "Dynamics of exponential smoothing with trend and seasonal terms", *Management Science*, v. 20, n° 9, pp. 1300-1304, 1974.

MITTAG, H.-J. "Measurement error effect on control chart performance." *ASQC 49th Annual Quality Congress Proceedings*, 66-74, 1995.

\_\_\_\_\_ "Measurement error effects on the performance of process capability indices". *Frontiers in Statistical Quality Control 5*, H. -J Lenz, P.-Th. Wilrich (eds.), 195-206, 1997

MITTAG, H. -J. & STEMANN, D. "Gage imprecision effect on the performance of the X – S control chart". *Journal of Applied Statistics*, v. 25, n°3, pp. 307-317, 1998.

MONTGOMERY, D. C. "Introduction to Statistical Quality Control, 3rd ed. Wiley, N.Y., 1997.

MONTGOMERY, D. C. & FRIEDMAN, D. J. "Statistical process control in a computer – integrated manufacturing environment", pp. 67-87, 1989.

MONTGOMERY, D. C. & MASTRANGELO, C. M. "Some statistical process control methods for autocorrelated data". *Journal of Quality Technology*, v. 23, n° 3, 179-193, 1991.

MONTGOMERY, D. C. & WOODALL, W. H. "A discussion on statistically-based process monitoring and control". *Journal of quality technology*, v.29, n° 2, pp.121-162, 1997.

NELSON, L. S. "Control charts for individual measurements", *Journal of Quality Technology*, v. 14, n° 3, pp. 172-173, 1982.

\_\_\_\_\_ "The deceptiveness of moving averages", *Journal of Quality Technology*, v. 15, n° 2, pp. 99-100, 1983.

\_\_\_\_\_ "Interpreting Shewhart  $\bar{X}$  control charts", *Journal of Quality Technology*, v. 17, n° 2, pp. 114-116, 1985.

PAGE, E. S. "Continuos inspection schemes *.Biometrika*, v. 41, pp. 100-114, 1954

\_\_\_\_\_ "On problems in which a change in a parameter occurs at an unknown point, *Biometrica*, v. 44, pp. 248-252, 1957.

\_\_\_\_\_ "Cumulative sum charts, *Technometrics*, v. 3, pp. 1-9, 1961.



- PRASAD, S. & T. BRAMORSKI "Robust process capability indices", *International Journal Management. Science*, v. 26, n°3, pp. 425-435, 1998
- ROBERTS, S. W. "Control charts tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, v. 1, pp. 239-250, 1959.
- ROBINSON, P.B. & T.Y. HO "Average run lengths of geometric moving average charts by numerical methods", *Technometrics*, v. 20, n° 1, pp. 85-93, 1978.
- SHAPIRO, S.S. & R. S. FRANCA "An approximate analysis of variance test for normality", *JASA*, v.67, n° 337, pp. 215-216, 1972.
- SPERRE, J. & WANG, H.-P. -B. "Machine performance monitoring and fault classification using an exponentially weighted moving average scheme." *International Journal of Production. Research* , v. 33, n° 2, 445-463, 1995.
- STUART, M., E. MULLINS, & E. DREW "Statistical quality control and improvement", *European Journal of Operational Research*, v.88, pp.203-214, 1996.
- TAGUCHI, G. & WU, Y. "Introduction to off-line quality control", Nagoya, Japan: Central Japan Quality Control Association, 1985.
- TSAY, R. S. "Times series model specifications in the presence of outliers". *JASA*, v. 81, n° 393, pp. 132-141, 1986.
- TSUNG, F; H. WU & V. N. NAIR "On the efficiency and robustness of discrete proportional-integral control schemes", *Technometrics*, v. 40, n° 3, pp. 214-222, 1998.

- VANDER WIEL, S., W. T. TUCKER, F. W. FALTIN, & N. DOGANAKSOY "Algorithmic statistical process control: concepts and an application", *Technometrics*, v. 34, n° 3, pp.286-297, 1992.
- VASILOPOULOS, A V. & A P. STAMBOULIS. "Modifications of control chart limits in presence of data correlation", *Journal of Quality Technology*, v. 10, n° 1, pp. 20-30, 1978.
- WARDELL, D. G.; H. MOSKOWITZ & R. D. PLANTE. "Run-Length distributions of special-cause control chart for correlated process", *Technometrics*, v. 36, n° 1, pp. 3-27 ( with discussion), 1994.
- WARDELL, D. G.; H. MOSKOWITZ & R. D. PLANTE. "Control charts in the presence of data correlation". *Management Science*, v. 38, n° 8, pp. 1084-1105, 1992.
- WHEELER, D. J. "Detecting a shift in process average: tables of the power function for  $\bar{X}$  control charts", *Journal of Quality Technology*, v. 15, n° 4, pp. 155-169, 1983.
- WINCEK, M. A. "Industrial strength times series: effect of new technologies on application and practice", unpublished paper presented at the 5<sup>th</sup> Annual Conference on Making Statistics more effective in Schools of Business, University of Kansas, June 2.
- WU, L. S.-Y., HOSKING, J. R. M. & RAVISHANKER, N. "Reallocation outliers in times series". *Applied Statistics*, v. 42, n° 2, 301-313, 1993.
- YASHCHIN, E. "Weighted cumulative sum technique". *Technometrics*, v.31, n° 3, 321-338, 1989.

## ANEXO 1 – FIGURAS

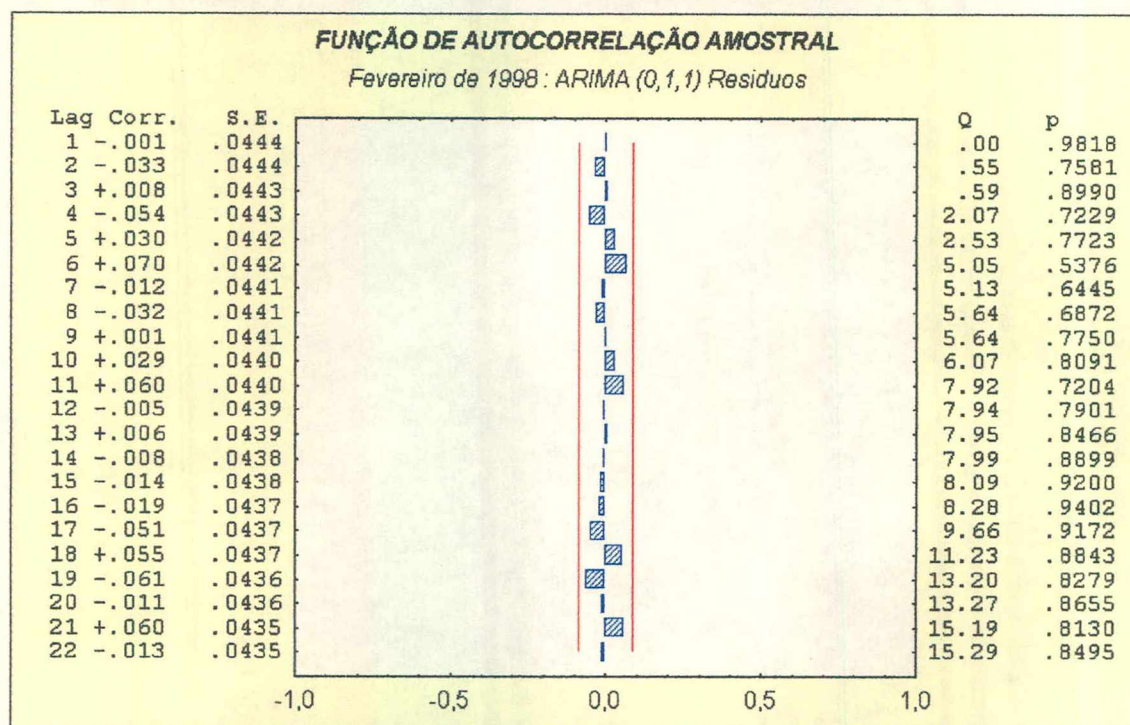


FIGURA 20 – GRÁFICO DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.1)

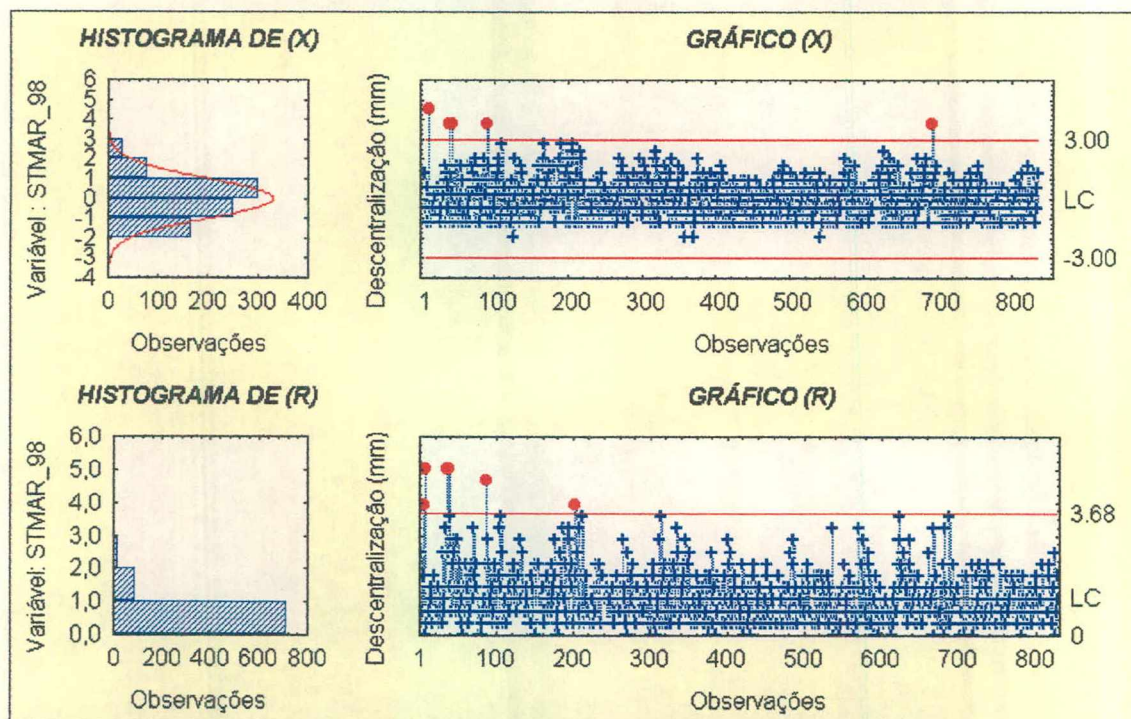


FIGURA 21 – GRÁFICO CONTÉM 830 LEITURAS EM INTERVALOS CONSTANTES DE UMA HORA AO LONGO DO MÊS DE MARÇO DE 1998. DADOS PADRONIZADOS POR  $\sigma$ .



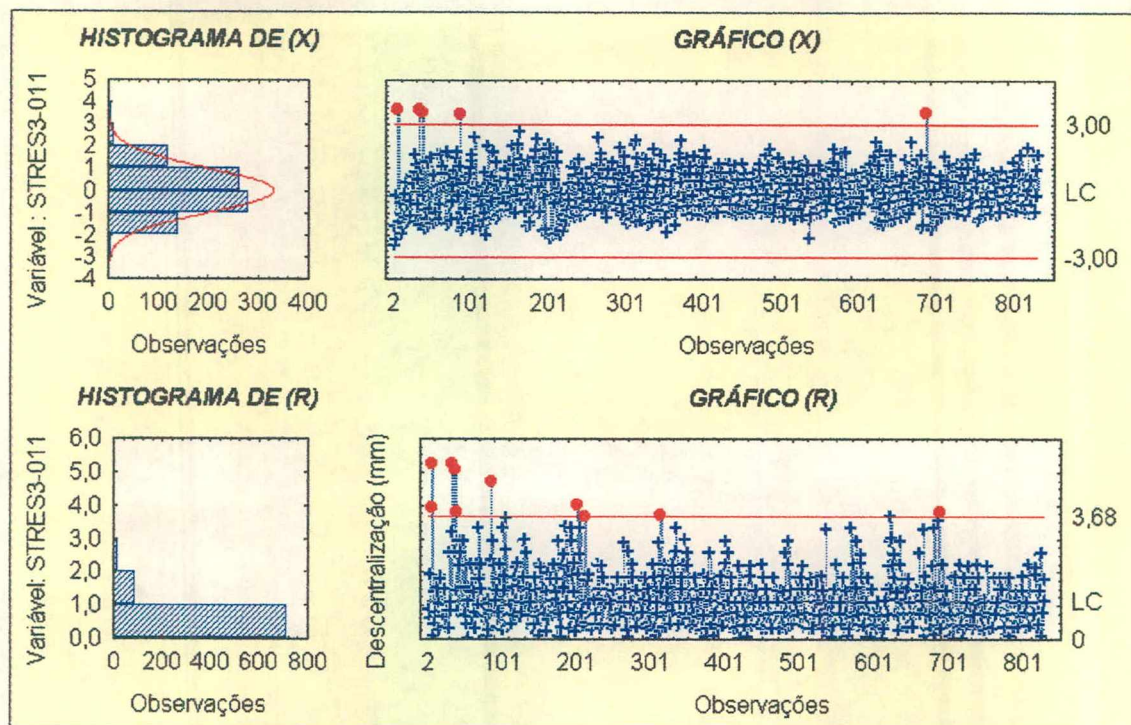


FIGURA 22 – GRÁFICO SCC DOS RESÍDUOS PADRONIZADOS DO MODELO (5.2.2)

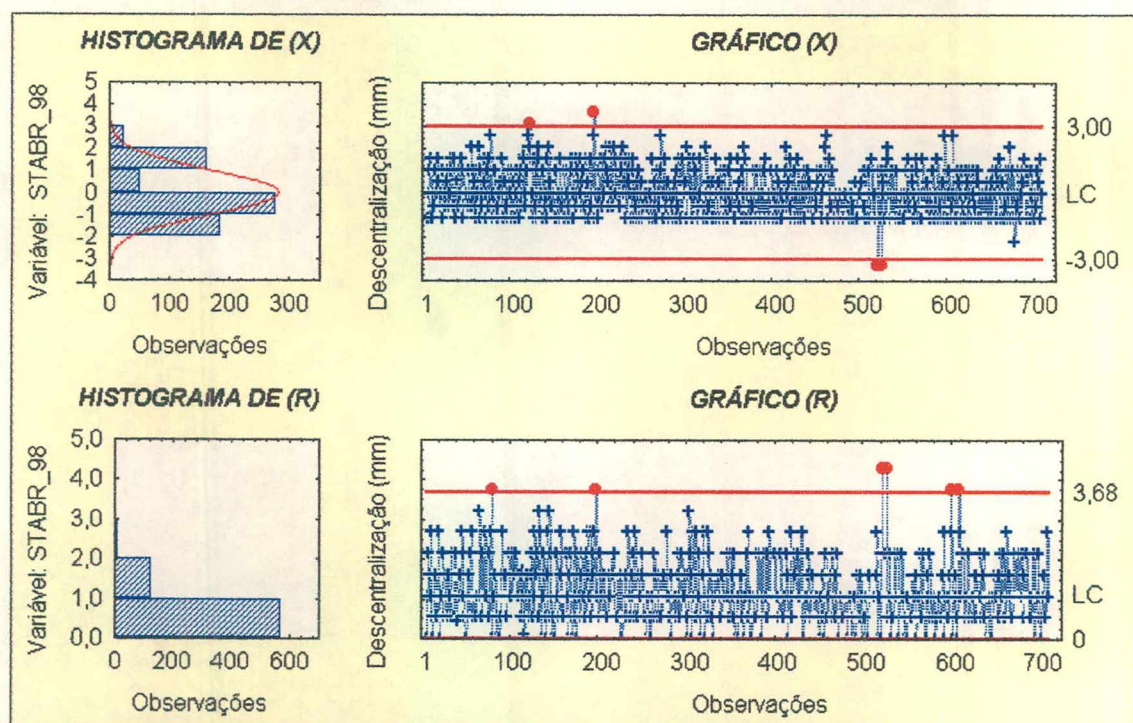


FIGURA 23 – GRÁFICO CONTÉM 705 LEITURAS EM INTERVALOS CONSTANTES DE UMA HORA AO LONGO DO MÊS DE ABRIL DE 1998. DADOS PADRONIZADOS POR  $\sigma$



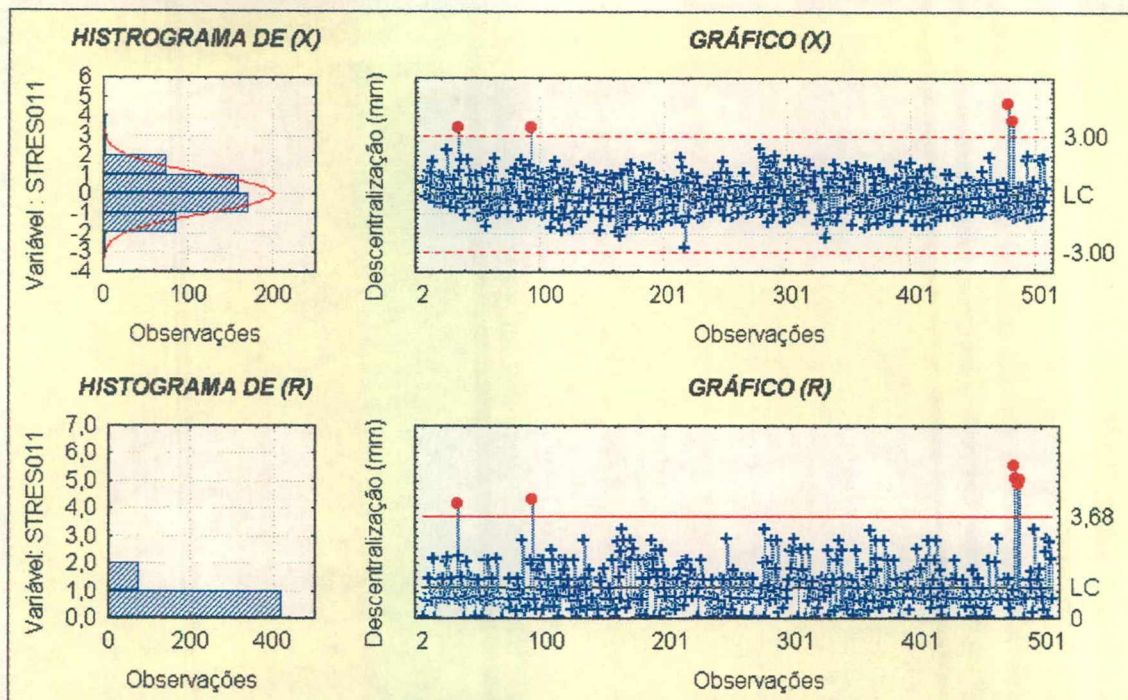


FIGURA 24 – GRÁFICO SCC DOS RESÍDUOS PADRONIZADOS DO MODELO (5.2.1)



FIGURA 25 – GRÁFICO CCC DOS VALORES AJUSTADOS PARA FEVEREIRO PELO MODELO ARIMA (0,1,1)



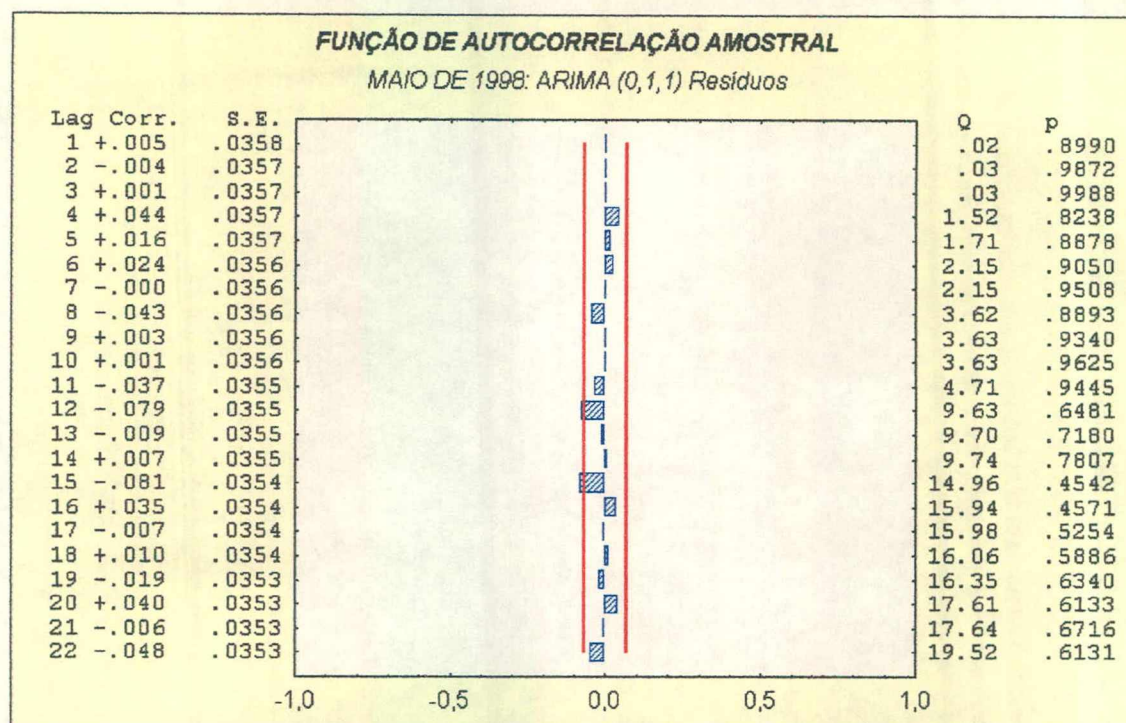


FIGURA 26 – GRÁFICO DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL  $r_k$  PARA AS DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DA EQUAÇÃO (5.2.4)

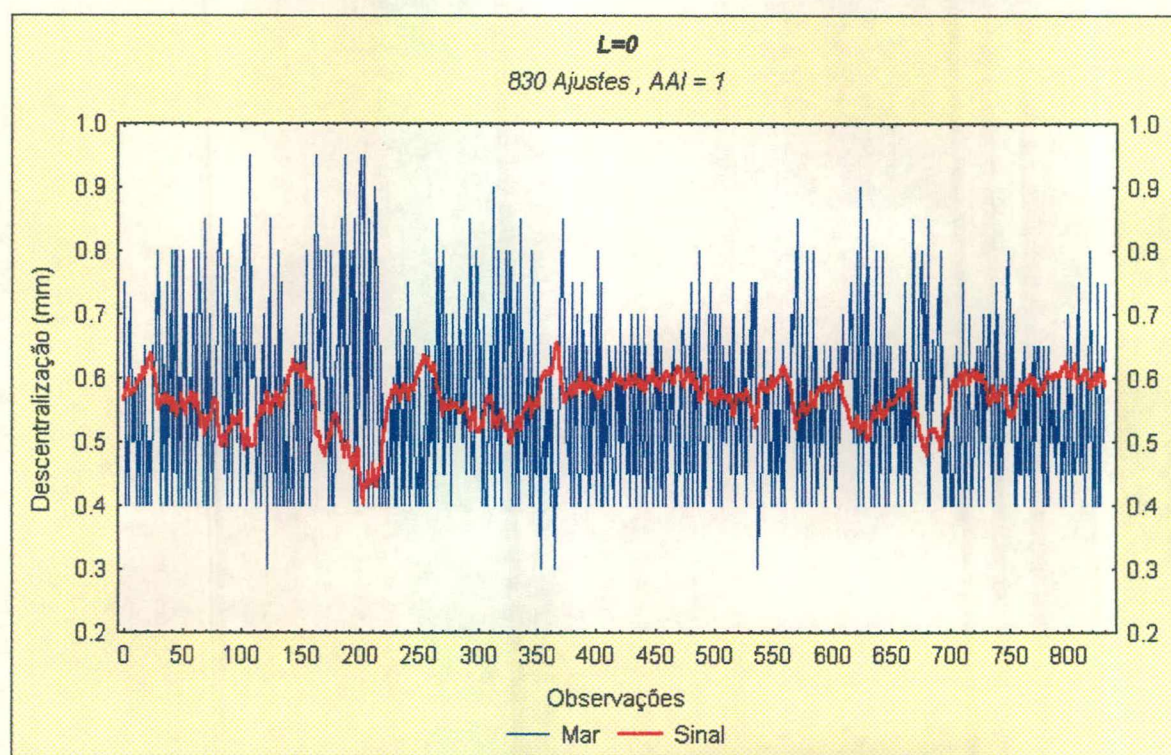
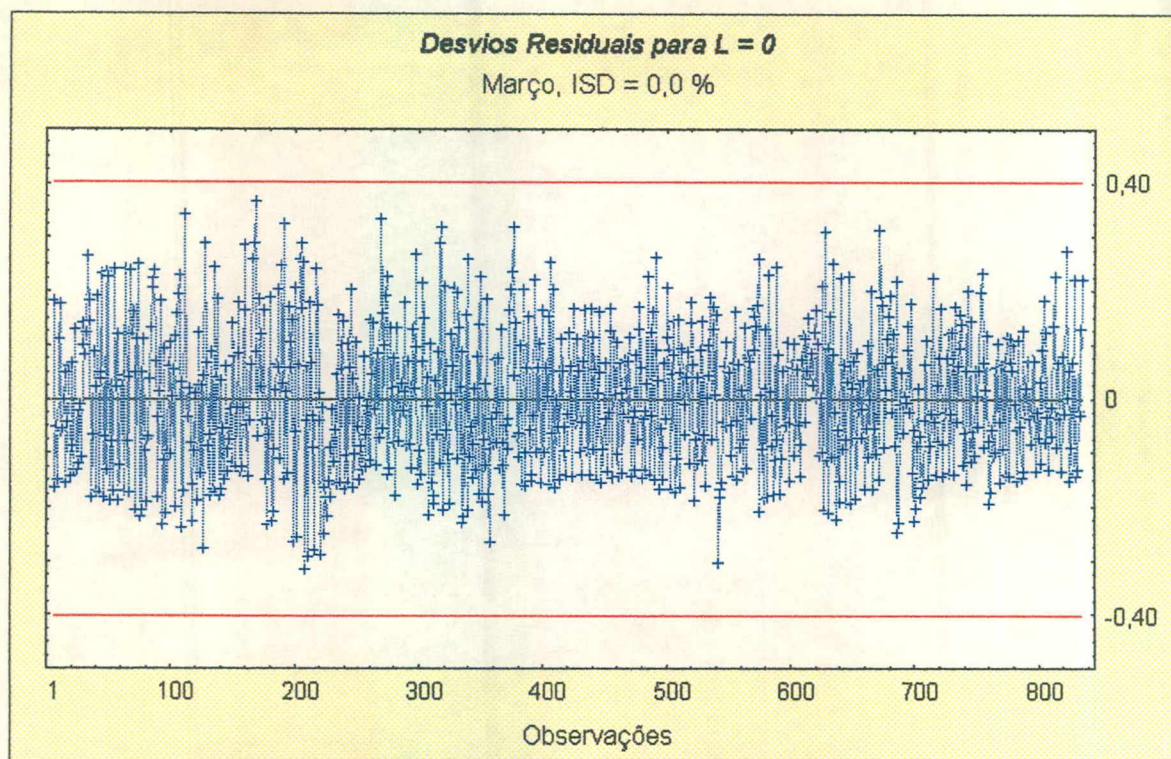
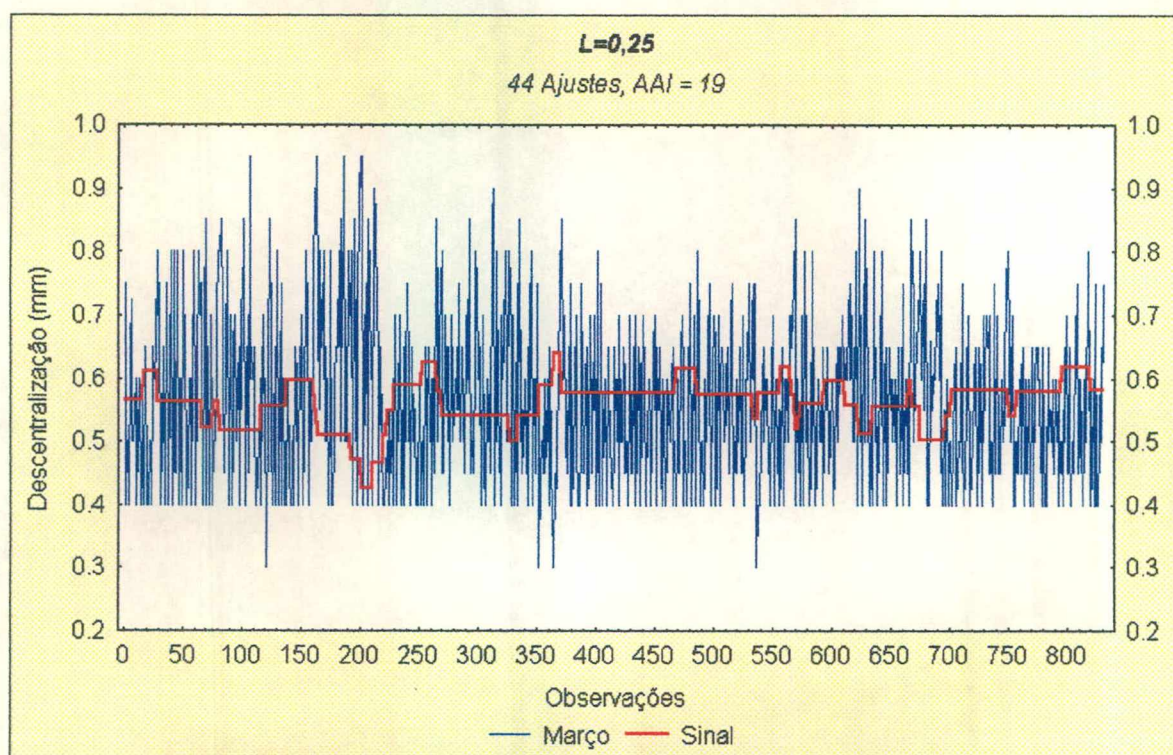


FIGURA 27 – SÉRIE NÃO COMPENSADA EM CONJUNTO COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0$  REFERENTE A MARÇO DE 1998



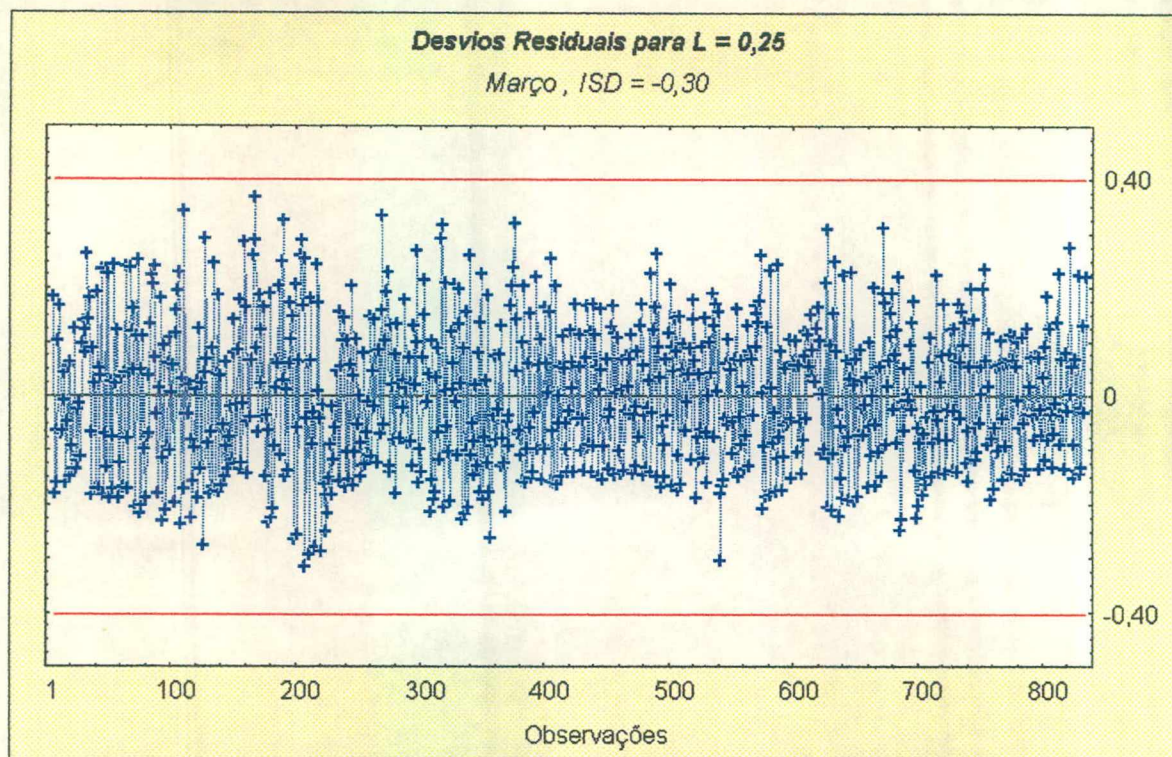


**FIGURA 28 – SÉRIE DOS DEVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_s$  PARA O ESQUEMA BAC PARA  $L = 0$  REFERENTE A MARÇO DE 1998**

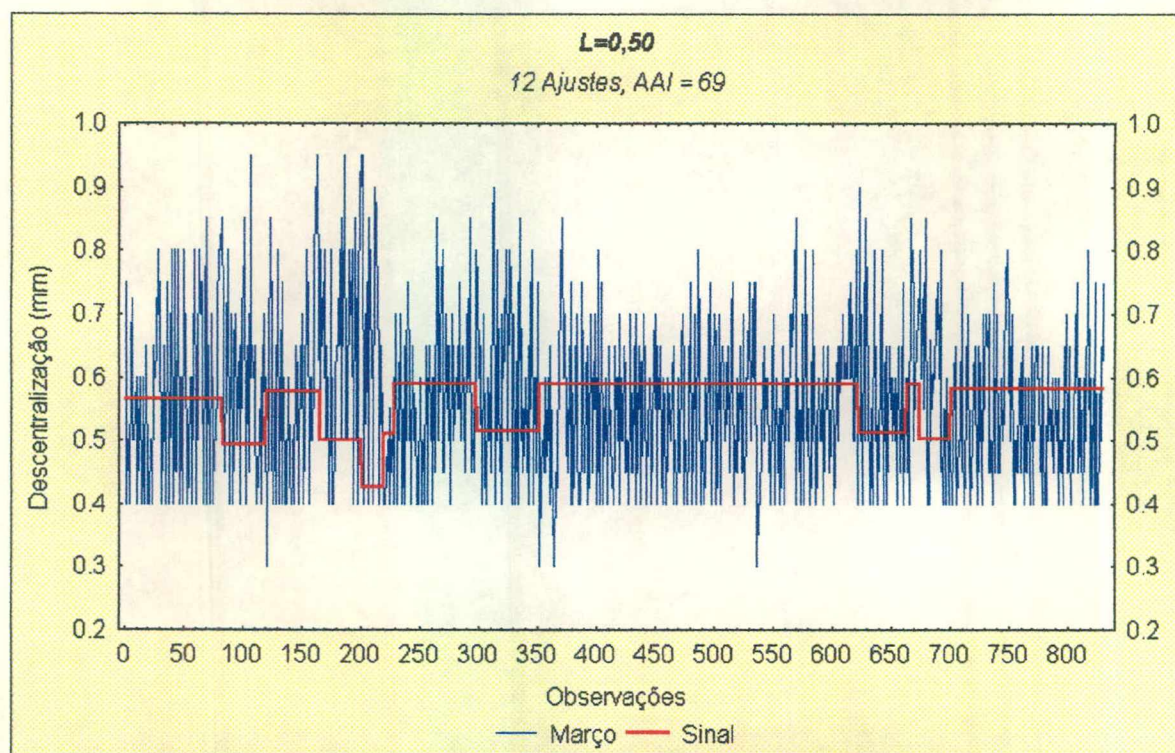


**FIGURA 29 – SÉRIE NÃO COMPENSADA EM CONJUNTO COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,25$  REFERENTE A MARÇO DE 1998**



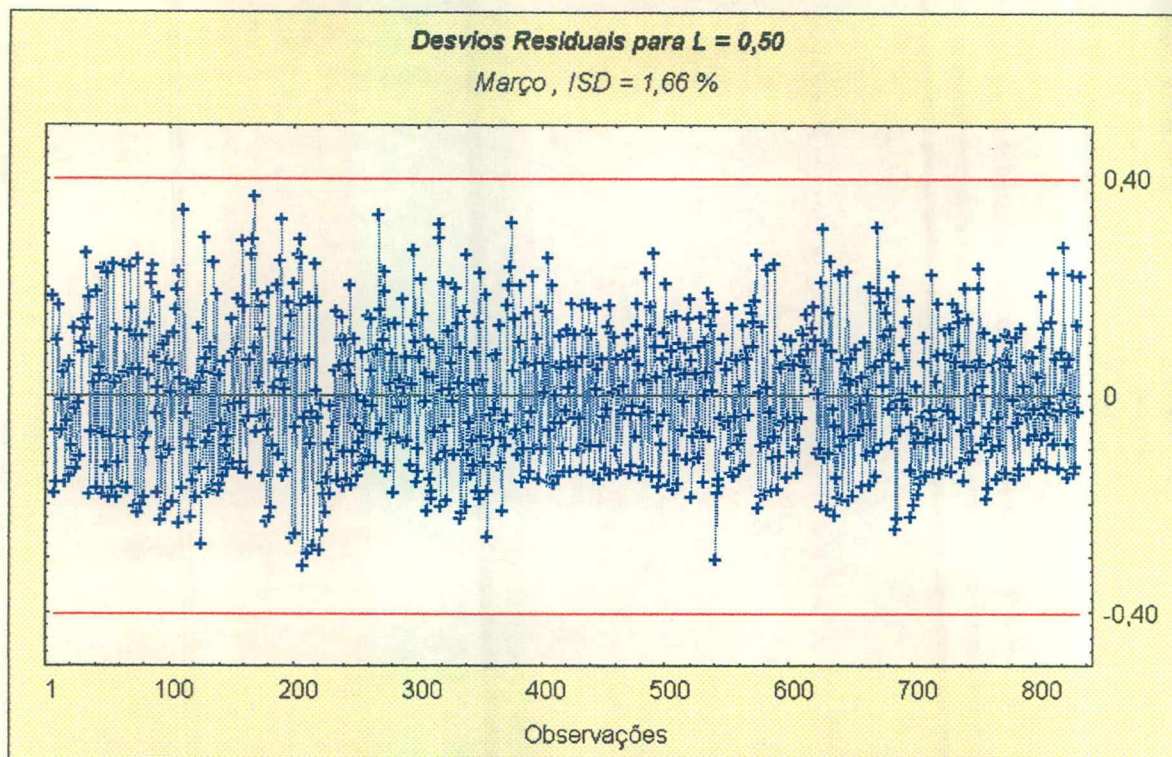


**FIGURA 30 – SÉRIE DOS DEVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_s$  PARA O ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,25$  REFERENTE A MARÇO DE 1998**

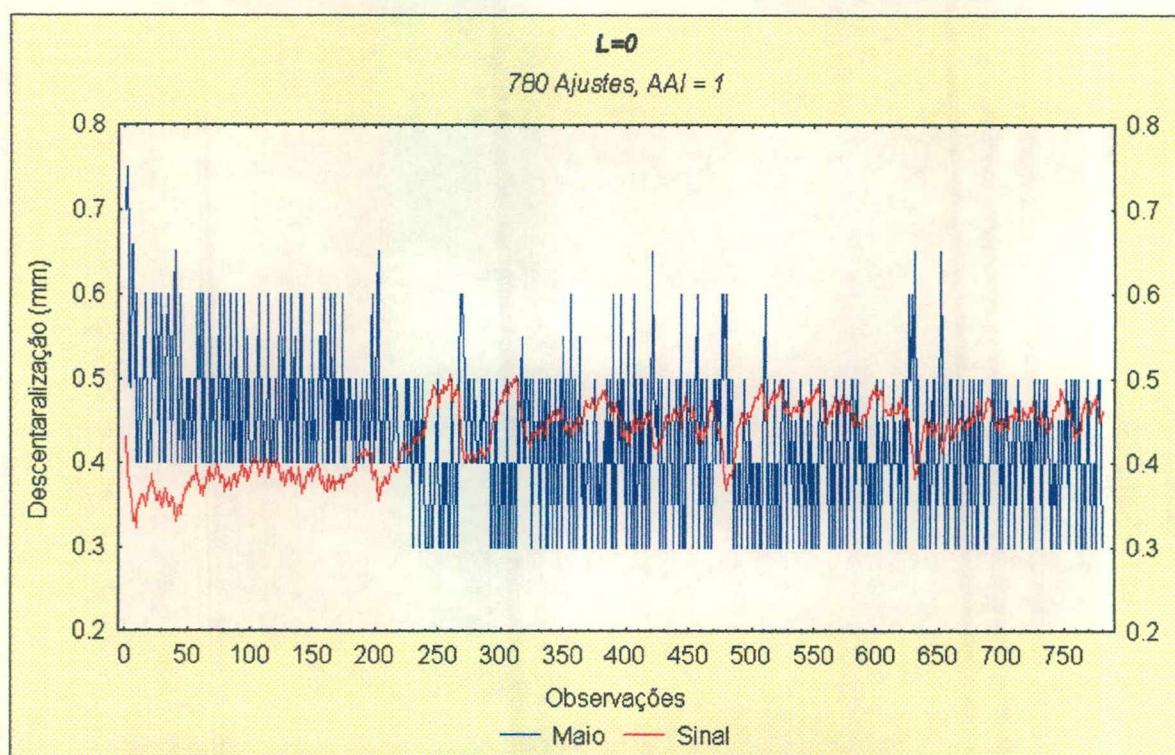


**FIGURA 31 – SÉRIE NÃO COMPENSADA EM CONJUNTO COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,50$  REFERENTE A MARÇO DE 1998**



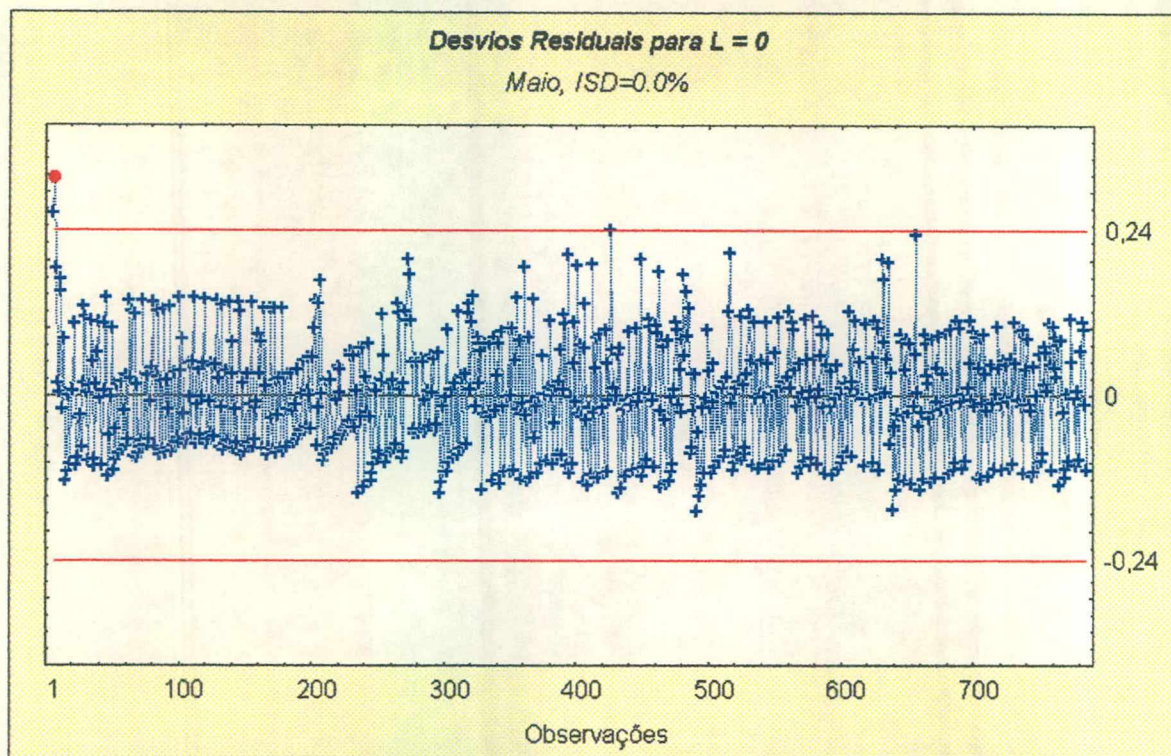


**FIGURA 32 – SÉRIE DOS DEVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_s$  PARA O ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,50$  REFERENTE A MARÇO DE 1998**

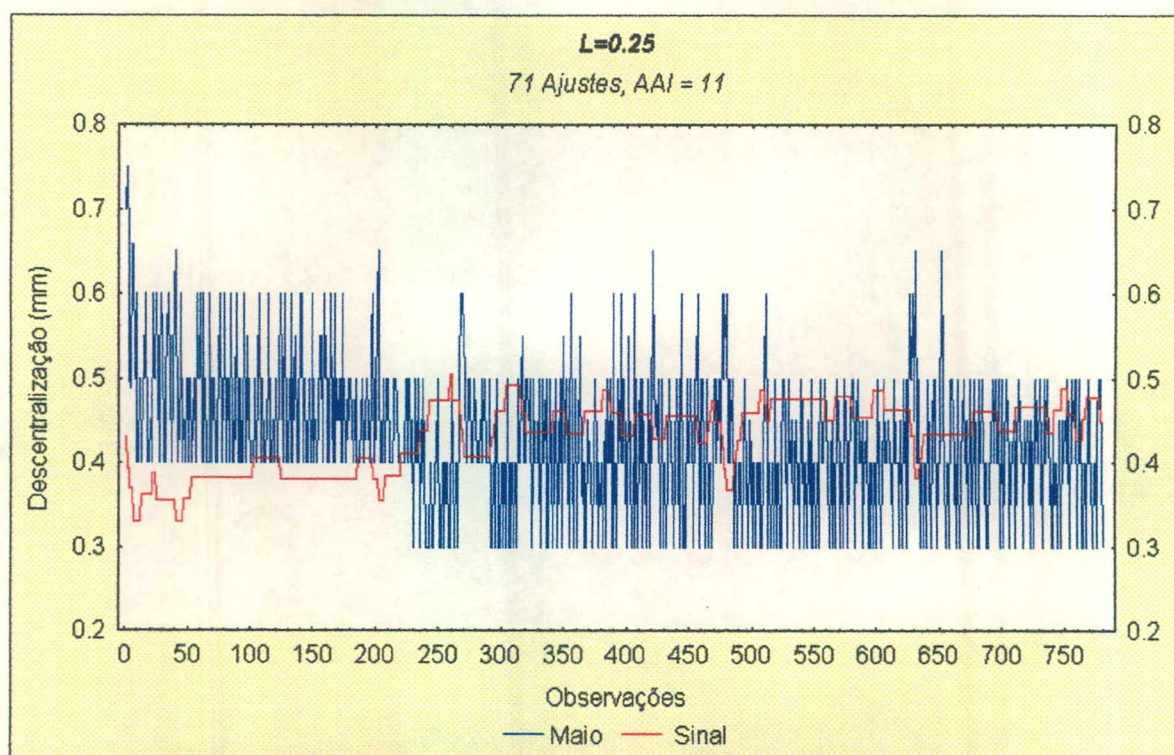


**FIGURA 33 – SÉRIE NÃO COMPENSADA EM CONJUNTO COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0$  REFERENTE A MAIO DE 1998**



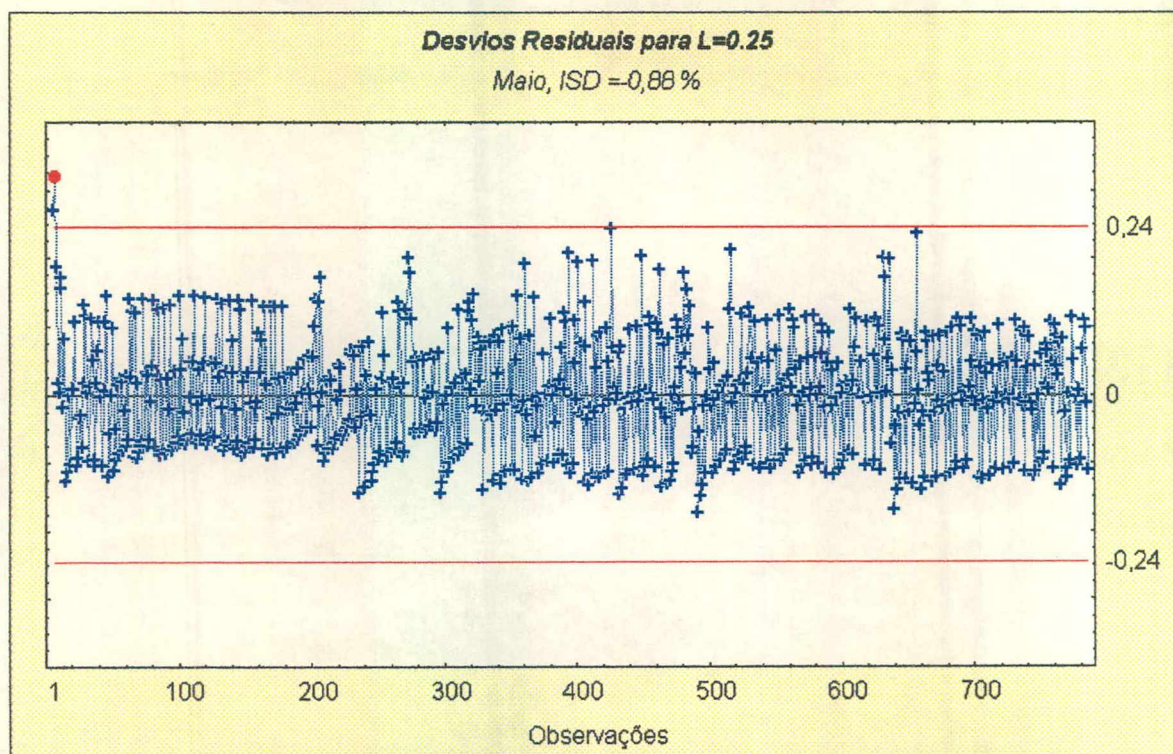


**FIGURA 34 – SÉRIE DOS DEVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_s$  PARA O ESQUEMA BAC PARA  $L = 0$  REFERENTE A MAIO DE 1998**

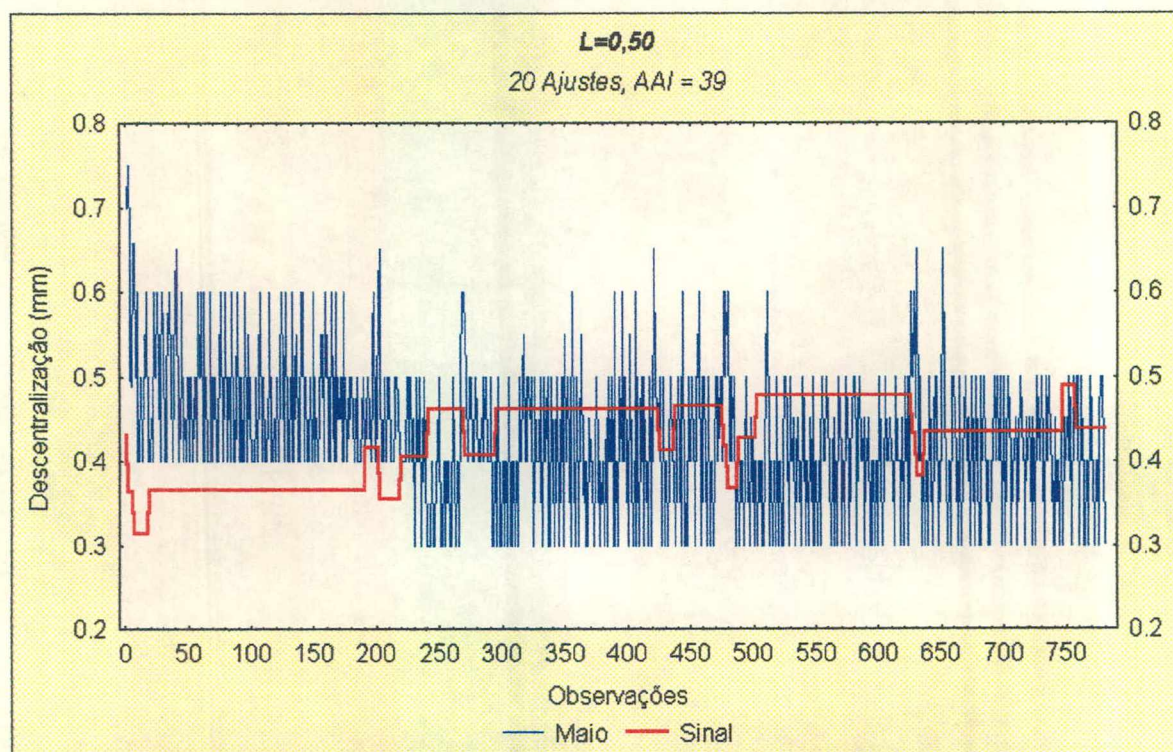


**FIGURA 35 – SÉRIE NÃO COMPENSADA EM CONJUNTO COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,25$  REFERENTE A MAIO DE 1998**



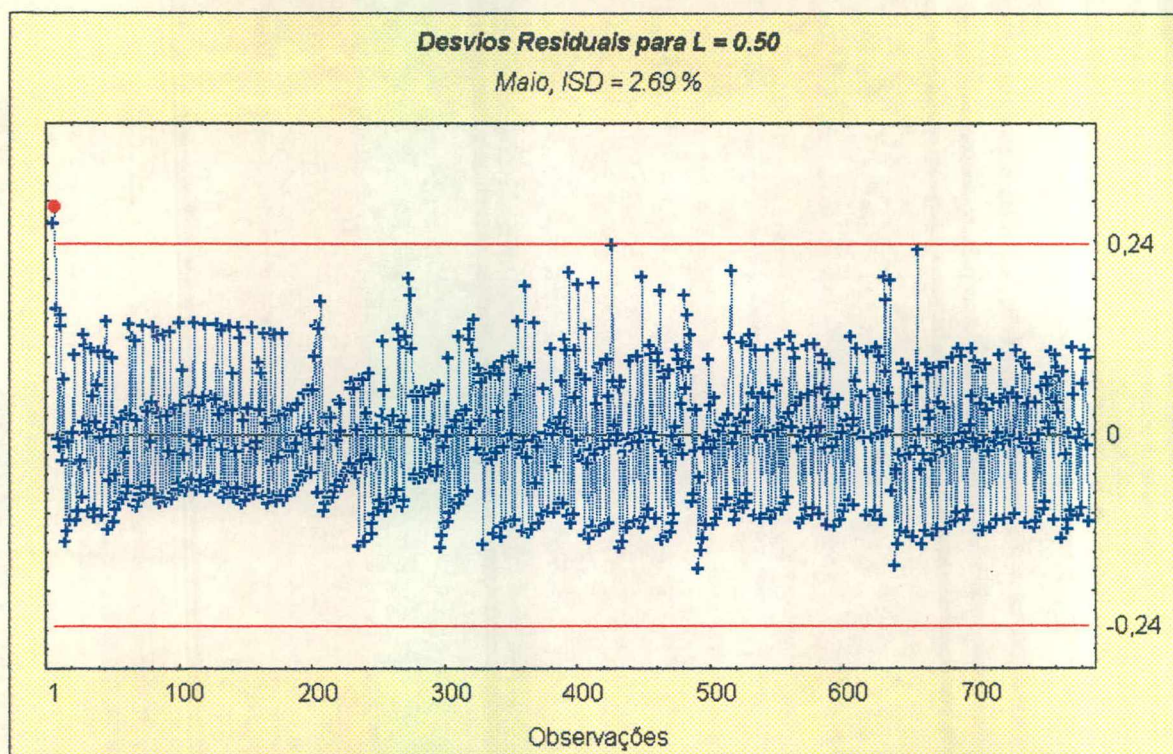


**FIGURA 36 – SÉRIE DOS DEVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_s$  PARA O ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,25$  REFERENTE A MAIO DE 1998**



**FIGURA 37 – SÉRIE NÃO COMPENSADA EM CONJUNTO COM O SINAL EXTRAÍDO PELO ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,50$  REFERENTE A MAIO DE 1998**





**FIGURA 38 – SÉRIE DOS DEVIOS RESIDUAIS MONITORADOS PELA ESTATÍSTICA DE FISHER  $Q_S$  PARA O ESQUEMA BAC PARA  $L = 0,50$  REFERENTE A MAIO DE 1998**



## -ANEXO 2 – PROGRAMA COMPUTACIONAL

A figura abaixo apresenta a estrutura computacional necessária para construir o gráfico BAC-EWMA a partir de uma planilha EXCELL.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Tempo (t)	Obs.: Yt	Yt=Yt+vt	Previsao	Erro	EWMA	Ajustes	Ajuste Total: vt	Controle: xt	Variável: Xt
2										
3	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4	1	0,02	0,0200	0,0000	-0,0200	0,0040	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	2	0,16	0,1600	-0,0040	0,1640	0,0288	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	3	0,24	0,2400	0,0288	0,2112	0,0710	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	4	0,29	0,2900	0,0710	0,2190	0,1148	-0,1148	-0,1148	-0,1435	-0,1435
8	5	0,34	0,2252	0,0000	0,2252	0,0450	0,0000	-0,1148	0,0000	-0,1435
9	6	0,24	0,1252	0,0450	0,0801	0,0611	0,0000	-0,1148	0,0000	-0,1435
10	7	0,31	0,1952	0,0611	0,1341	0,0879	0,0000	-0,1148	0,0000	-0,1435
11	8	0,26	0,1452	0,0879	0,0573	0,0993	0,0000	-0,1148	0,0000	-0,1435
12	9	0,38	0,2652	0,0993	0,1658	0,1325	-0,1325	-0,2473	-0,1656	-0,3092
13	10	0,29	0,0427	0,0000	0,0427	0,0085	0,0000	-0,2473	0,0000	-0,3092
14	11	0,25	0,0027	0,0085	-0,0059	0,0074	0,0000	-0,2473	0,0000	-0,3092
15										
16										
17										
18										
19										

**FIGURA 39 – PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA DETERMINAR OS AJUSTES ESTOCÁSTICOS REALIZADOS ATRAVÉS DO GRÁFICO BAC NA PLANILHA EXCEL.**

**Quadro 13 – Procedimentos para a Construção do Gráfico BAC na Planilha Excel**

Célula 1C = 1B	Célula 2C = 2B + 1H	Célula 3C = copiar 2C
Célula 1D = 0	Célula 2D = Se (ABS 1F > L); 0; 1F)	Célula 3D = copiar 2D
Célula 1E = 1C - 1D	Célula 2E = 2C - 2D	Célula 3E = copiar 2E
Célula 1F = 1D + $\lambda$ . 1E	Célula 2F = 2D + $\lambda$ . 2E	Célula 3F = copiar 2F
Célula 1G = Se (ABS(1F > L); -1F;0)	Célula 2G = Se (ABS(2F > L); -1F;0)	Célula 3G = copiar 2G
Célula 1H = 0	Célula 2H = 1H + 2G	Célula 3H = copiar 2H
Célula 1I = 1G/ g	Célula 2I = 2G/ g	Célula 3I = copiar 2I
Célula 1J = 0	Célula 2J = 1J + 2I	Célula 3J = copiar 2J



### -ANEXO 3 – DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO (5.3.3)

Seja a equação de diferença do modelo ARIMA (2, 1, 2) dada por:

$$\nabla Z_t = \phi_1 \nabla Z_{t-1} + \phi_2 \nabla Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Faça  $\nabla Z_t = W_t$ , gerando uma seqüências de observações estacionárias. Note

que  $\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2}$ . Expandindo infinitamente o polinômio da esquerda

tem-se:

$$(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)$$

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 + \psi_1 B - \psi_1 \phi_1 B^2 + \dots + \psi_n B^n - \psi_n \phi_1 B^{n+1} - \psi_n \phi_2 B^{n+2} + \dots = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

$$1 + (\psi_1 - \phi_1)B + (\psi_2 - \psi_1 \phi_1 - \phi_2)B^2 + (\psi_3 - \psi_2 \phi_1 - \psi_1 \phi_2)B^3 + \dots = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

Igualando os dois polinômios obtém-se os valores para  $\psi_j$ , para  $\forall j = 1, 2, \dots, \infty$ :

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 - \phi_1 = -\theta_1 \quad \Rightarrow \psi_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$\psi_2 - \psi_1 \phi_1 - \phi_2 = -\theta_2 \quad \Rightarrow \psi_2 = (\phi_1 - \theta_1)\phi_1 + \phi_2 - \theta_2$$

Desta forma, a variância de  $W_t$  pode ser calculada através da função de autocovariância do modelo ARMA( $p, q$ ) descrita na equação (4.23), página 46. Então,

$\hat{\gamma}_o = \hat{\phi}_1 \gamma_1 + \hat{\phi}_2 \gamma_2 - \hat{\sigma}_a^2 (\psi_o + \hat{\theta}_1 \psi_1 + \hat{\theta}_2 \psi_2)$ , dividindo por  $\gamma_o$  tem-se:

$1 = \phi_1 \hat{\rho}_1 + \phi_2 \hat{\rho}_2 - \frac{\hat{\sigma}_a^2}{\hat{\gamma}_o} (1 - \hat{\theta}_1 \psi_1 - \hat{\theta}_2 \psi_2)$ , como  $\gamma_o = \sigma_w^2$ . Portanto, encontra-se que:

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma_a^2 (1 - \hat{\theta}_1 \psi_1 - \hat{\theta}_2 \psi_2)}{1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2}$$

As equações (5.3.1) e (5.3.5) são obtidas de forma equivalente.